להגשה
עד 24/5/2016

אנליזה הרמונית

גליון 9

① סמנו: $\mu(A)=\int_A \frac{dx}{\pi(1+x^2)}$.

(א) חשבו את $\mu*\mu$.

(ב) הוכיחו $\underbrace{(\mu*\mu*\cdots*\mu)}_{N}((\sqrt{N}a,\sqrt{N}b)) \xrightarrow[N\to\infty]{} \int_a^b \exp\left(-\frac{x^2}{C}\right)\frac{dx}{\sqrt{C\pi}}$
עבור איזשהו $C>0$?

② סמנו: $j_d(\xi)=\int_{S^{d-1}} e^{i\xi\theta_1}\, d\sigma(\theta)$ כאשר σ - מידת Lebesgue על S^{d-1} עם הנרמול $\sigma(S^{d-1})=1$.

(א) $j_d''+\frac{d-1}{\xi}j_d'=-j_d$

(ב) $j_3(\xi)=\frac{\sin\xi}{\xi}$

(ג) $\lim_{d\to\infty} j_d\left(\frac{\xi}{\sqrt{d}}\right)=\exp(-\xi^2/2)$

③ הוכיחו:
$$t^{-1/2}\sum_{n\geq 0}\#\left(\mathbb{Z}^2\cap B(0,\sqrt{n})\right)e^{-\pi n/t}$$
$$=t^{1/2}\sum_{n\geq 0}\#\left(\mathbb{Z}^2\cap B(0,\sqrt{n})\right)\cdot e^{-\pi n t}$$

④ תהי $f\in L_2(\mathbb{T})$ ותהי g אנליטית ב-$\mathbb{D}$ המקיימת: $g(re^{2\pi ix})\xrightarrow[r\to 1-0]{} f(x)$ ב-$L_2(\mathbb{T})$, אז $g(z)=\sum_{n\geq 0}\hat{f}(n)z^n$, אם $\hat{f}(n)=0$ לכל $n<0$.

⑤ נניח ש-$f\in L_2(\mathbb{T})$ אינה מתאפסת כמעט תמיד, ומקיימת: $\limsup_{n\to+\infty}|\hat{f}(-n)|^{1/n}<1$. אז $\int_0^1\log|f(x)|dx>-\infty$
(בפרט f לא יכולה להתאפס על קטע ממידה חיובית).

⑥ הוכיחו: לכל $g\in\mathbb{H}^2(\mathbb{D})$
$$\|g\|^2=|g(0)|^2+2\iint_{\mathbb{D}}dx\,dy\,|g'(x+iy)|^2\log\frac{1}{|x+iy|}$$