להגשה עד
10/5/2016

אנליזה הרמונית

תרגיל 8

① תהי $f\in S(\mathbb{R})$ כך ש- $|\langle f'', f\rangle|\cdot|\langle x^2 f, f\rangle| = \frac{\|f\|_2^4}{16\pi^2}$.
הראו כי $f(x) = A\exp(-Bx^2)$.

② אם μ, ν -מידות בורל (מרוכבות) סופיות על R,
אז $\|\mu*\nu\|\leq\|\mu\|\cdot\|\nu\|$.

③ עבור $f_0,\dots,f_{n-1}\in S(\mathbb{R})$ אי-שליליות, שמן $f_n=f_0$ נגדיר

$$Z_n(f_0,\dots,f_{n-1}) = \int dx_0\int dx_1\cdots\int dx_{n-1}\prod_{j=0}^{n-1}\left[f_j(x_j)\cdot\exp(-(x_j-x_{j+1})^2)\right].$$

הוכיחו:

$$Z_n(f_0,\dots,f_{n-1})\leq\prod_{j=0}^{n-1}Z_n(f_j,f_j,\dots,f_j)^{1/n}.$$

④ נניח $\varphi:\mathbb{R}\to\mathbb{C}$ מקיימת

$$(*)\quad \forall k\ \forall \xi_1,\dots,\xi_k\in\mathbb{R},\ z_1,\dots,z_k\in\mathbb{C}\quad \sum_{j=1}^{k}\varphi(\xi_j-\xi_k)z_j\overline{z_k}\geq 0.$$

(א) הראו כי אם φ רציפה ב- 0 אז היא רציפה במידה שווה (נסו את הכיוון הקל של Bochner).

(ב) האם נתון ש- (*) מתקיימת אין φ אז רציפה?

⑤ (א) הראו כי לכל $x>1$ הפונקציה $y\mapsto\log\zeta(x+iy)$ מוגדרת חיובית (לפי Mathias, כלומר מקיימת (*) ורציפה).

(ב) האם $y\mapsto\log|\zeta(x+iy)|$ מוגדרת חיובית.

(ג) ל- $\zeta(s)$ אין אפסים על הישר $x=1$.

מותר ונכון, להשתמש בהמשכה המרומורפית של ζ ולהניח: שיש לו קוטב פשוט ב- $s=1$.