להגשה עד
22/3/16

תרגיל #3

אנליזה הרמונית

<u>הגדרה</u> סדרת פונקציות $K_N(y)$ נקראת גרעין סכימה

אם (i) $\int K_N(y)\,dy=1$, (ii) $\sup_N \int |K_N(y)|\,dy<\infty$, (iii) לכל $\varepsilon>0$

מתקיים: $\lim_{N\to\infty}\int_{\varepsilon}^{1-\varepsilon}|K_N(y)|\,dy=0$.

① (א) אם $K_N(y)$ - גרעין סכימה, אז לכל $f\in C(\mathbb{T})$

מתקיים: $\int K_N(x-y)f(y)\,dy \rightrightarrows f(x)$.

(ב) $\int_0^1 |D_N(y)|\,dy \ge c\log N$, ולכן $D_N(y)$

אינו גרעין סכימה.

② נגדיר $P_r(y)=\sum_{n\ge 0} r^{|n|} D_n(y)$, $0<r<1$. (א) $P_r(y)=\frac{1-r^2}{1-2r\cos(2\pi y)+r^2}$

(ב) P_r - גרעין סכימה אידיאלי, כלומר, (i) $\int P_r(y)\,dy=1$,

(ii) $P_r\ge 0$, (iii) $\lim_{r\to 1-0}\int_{\varepsilon}^{1-\varepsilon} P_r(y)\,dy=0$ לכל $\varepsilon>0$.

(ג) לכל $f\in C(\mathbb{T})$ $\sum_n r^{|n|}\hat f(n)e_n \underset{r\to 1-0}{\rightrightarrows} f$.

③ (א) אם $\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} c_n \to a$ וגם $\lim |c_n|\cdot n=0$,

אז $c_n\to a$. (ב) אם $f\in C(\mathbb{T})$ וכן $|\hat f(n)\cdot n|\to 0$,

אז $\sum_{-N}^{N}\hat f(n)e_n \rightrightarrows f$. (ג)* במקום $|\hat f(n)\, n|\to 0$ מספיק

לדרוש: $|\hat f(n)\cdot n|\le C$.

④ תהי $f\in L_1(\mathbb{T})$.

(א) אם f רציפה ב-0, אז $\sum_{|n|\le N}\left(1-\frac{|n|}{N}\right)_+\hat f(n)\to f(0)$

(ב) אם $\int_{-1/2}^{1/2}\frac{|f(x)-f(0)|}{|x|}\,dx<\infty$, אז

$\sum_{|n|\le N}\hat f(n)\to f(0)$.