לוינשטיין עדי
31/5/16

תרגיל 10

אנליזה הרמונית

1. נגדיר $(p_n^{(k)})_{n\in\mathbb{Z}}$ ו- $(p_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ סדרות אקראיות.

נניח שלכל $l\geq 0$ המספרים $\sum_n p_n^{(k)}|n|^l$ ו- $\sum_n p_n|n|^l$ סופיים, ומתקיים:

$$\sum_n p_n^{(k)} n^l \longrightarrow \sum p_n n^l .$$

(א) הראו ש- $\sum_n p_n n^{2l} \underset{\circledast}{\leq} (Al)^{2l}$ אז, בהכרח $p_n^{(k)} \xrightarrow[(\#)]{} p_n$ לכל n.

(ב) האם (#) מתקיים בלי הנחה ⊛?

2. נניח $N\to\infty$, ו- $k_N/N^{3/4}\to 0$. אז

$$\binom{2N}{N+k_N} = 2^{2N}\cdot\frac{1}{\sqrt{\pi N}}\cdot\exp\left(-k^2/N\right)\cdot(1+o(1))$$

3. תהא μ מידה שנתמכת ב- $[-R,R]$. נגדיר

$$F(z)=\int \exp(-2\pi i\xi z)\,d\mu(\xi)$$

(א) F שלמה, ומקיימת: $|F(x+iy)|\in O(e^{2\pi R|y|})$

(ב) האם בהכרח $|F(x+iy)|=o(e^{2\pi R|y|})$?

4. נניח ש- F שלמה,

$$\lim_{r\to+\infty}\frac{1}{r}\log_{+}\max_{\theta}|F(re^{i\theta})|=0$$

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{|F(x)|^2}{1+x^2}\,dx<\infty$$

אז F קבועה.

5. $\{f\in C^\infty(\mathbb{T}) \mid \forall n\ \|f^{(n)}\|_\infty\leq R_f^n\cdot M_n\}$ קוואזי-אנ' $\iff$
$\{f\in C^\infty(\mathbb{T}) \mid \forall n\ \|f^{(n)}\|_2\leq R_f^n M_n\}$ קוואזי-אנ'

6. אם $\mu,\nu\geq 0$ מידות $\forall n\ \int x^n d\mu=\int x^n d\nu=s_n$
ו- $\sum s_{2n}^{-1/2n}=\infty$ אז $\mu=\nu$.