Mathematische Erkenntnis

Hauptseminar-Aufsatz zu Mark Steiners Buch

"Mathematical Knowledge"

(Ithaca, Cornell University Press, 1975)

August 1989

RAINER KLAGES

JOHANN-EWALD-WEG 5
1000 BERLIN 22
MATR.-NR. 94227

allein nicht ausreiche, um mathematische Strukturen aufzubauen, sondern darüber hinaus mathematische Induktion vonnöten sei. G.Frege und B.Russell z.B. wird vorgeworfen, daß sie beim logizistischen Aufbau der Arithmetik zwei Konzepte für die natürlichen Zahlen eingeführt hätten: ein prädikatenlogisches und ein mengentheoretisches. Die Kritik an deren Verfahren gipfelt in der Behauptung, daß für den Beweis einer Übereinstimmung beider Konzepte meta-mathematische Induktion notwendig sei, die außerhalb eines logizistischen Begründungsprogramms liegen würde. Steiner dagegen verteidigt den logizistischen Ansatz, indem er ausführt, daß eine Übereinstimmung gar nicht gezeigt werden muß; entscheidend ist seiner Meinung nach allein, daß ein logizistischer Aufbau der Zahlentheorie in einer Richtung (d.h. von Prädikatenlogik ausgehend) gelingt.

Ein weiterer epistemologischer Angriff auf das logizistische Programm wird von L.Wittgenstein geführt, der eine Überschaubarkeit mathematischer Beweise, insbesondere, wenn sie in logische Notation umgeformt werden, anzweifelt. Damit wird die z.B. von A.J.Ayer oder R.Carnap vertretene Auffassung kritisiert, Logik diene als Hilfsmittel, all das deutlich zu machen, was implizit durch gewisse Theoreme ausgedrückt oder durch bestimmte (Rechen-)Regeln vorgegeben wird, das ein Mensch als "endliches Wesen" von vornherein aber nicht überschauen kann. Anhand von Beispielen versucht Wittgenstein deutlich zu machen, daß ein in Logik umgeschriebener "unendlich langer" mathematischer Beweis nicht mehr überschaubar, u.U. nicht einmal mehr nachvollziehbar ist und daß demgegenüber auf einer anderen Ebene, z.B. in der üblichen Arithmetik oder Alltagssprache, bereits Wissen um dasjenige vorausgesetzt werden muß, was man gerade logizistisch zu begründen sucht.

In einem dritten Abschnitt wird die Rolle, die Abkürzungen bzw. Definitionen bei der Anerkennung von logischen Beweisen spielen, untersucht. Insbesondere nimmt Steiner zu einem Vorwurf W.V.O.Quines Stellung, daß durch Gebrauch von Definitionen bei einer Reduktion von Mathematik auf Logik konventionalistische Elemente ins Spiel gebracht werden, wodurch Mathematik der Gefahr eines Relativismus ausgesetzt werden würde.

Während am Ende des ersten Kapitel die logizistische Schule gestärkt aus der Diskussion hervorgeht, gelangt Steiner im zweiten Kapitel zu einer Ablehnung sowohl des alten Logizismus als auch einer abgeschwächten neueren Version, des "Quineschen Neologizismus". Seiner Auffassung nach ist gerade diejenige Theorie, auf die Arithmetik erkenntnistheoretisch reduziert werden soll, d.h. in erster Linie Mengentheorie, epistemologisch unsicherer als die zu begründende Arithmetik selbst. Bereits in Abwendung von einer logizistischen Stoßrichtung geht Steiner auf einen Ansatz von P.Benacerraf ein, der Zahlen nicht als Objekte ansieht, sondern der als Zahleneigenschaft die Relation definiert, in der Elemente einer bestimmten Struktur zueinander stehen.

Im dritten Kapitel untersucht Steiner die Beziehung zwischen Beweis und mathematischem Wissen. So wird diskutiert, was unter einem mathematischen Beweis zu verstehen ist und was es heißt, einen Beweis zu wissen. Anhand eines Beispiels verdeutlicht

Steiner seine These, daß es nicht notwendig sei, Beweise zu wissen oder verstanden zu haben, um Mathematik zu können.

Im vierten Kapitel wendet sich Steiner unter den Vorzeichen eines mathematischen Platonismus dem Problem des Erwerbens von mathematischem Wissen zu. Die Schwierigkeit, wie man zu Wissen über abstrakte Entitäten gelangen kann, die - als eine Art unwandelbarer Ideen - mit der übrigen realen Welt nicht in kausalem Zusammenhang stehen, führt auf die Behandlung von Kausaltheorien (der Erkenntnis und der Wahrnehmung) und deren epistemologische Relevanz für einen möglichen mathematischen Platonismus. Im Verlauf einer Diskussion der holistischen Auffassungen Quines und G.Berrys entwirft Steiner das Schema einer besonderen Art mathematischer Intuition: Steiner plädiert nicht für eine im herkömmlichen Sinne "platonische Fähigkeit der Teilhabe", sondern - weniger mystisch und mit einem geringeren Erkenntnisanspruch - für eine Deutung mathematischer Intuition als einer "Intuition von Strukturen", welche als eine Art Abstraktionsprozeß verstanden werden könnte und laut Steiner der unter Mathematikern verbreiteten Auffassung am nächsten käme.

Kapitel 2

Logik und mathematische Erkenntnis: Kritik des logizistischen Programms

2.1 Reduktionismus

Das logizistische Programm eines Reduktionismus, d.h. einer Rückführbarkeit von Mathematik auf Logik, manifestiert sich insbesondere in folgenden beiden Grundthesen:

(R1) "The *concepts* of mathematics can be derived from logical concepts through explicit definitions."

(R2) "The *theorems* of mathematics can be derived from logical axioms through purely logical deduction."(23)

Epistemologisch ergeben sich daraus folgende Doktrinen, gegen die im Laufe von Kapitel 1 Stellung bezogen wird:

(E1) "There is some formal system of logic such that mathematics can effectively be generated from it."(eine Art logizistische Existenzaussage)

(E2) "It is sufficient to understand proofs written in this system, in order to know all the truths of mathematics that we can know." (Prinzip des Reduktionismus)

(E3a) "It is possible for *us*, with our limited abilities, actually to come to know mathematical truths in the way suggested by (E2), that is, by constructing logical proofs of them."

(E3b) "One has not *true* mathematical knowledge of what one lacks the ability, at least latent, to produce a proof in logic." (Forderungen in Bezug auf das erkenntnistheoretische Subjekt)

2.1.1 Mengentheorie und Prädikatenlogik

Unter diesem Stichwort kann insbesondere die Diskussion zu Punkt (E2) zusammengefaßt werden (s.S.26ff). Um die Stoßrichtung einer Kritik (und Steiners Kritik an der Kritik) deutlich zu machen, ist scharf zwischen Objektsprache ("know how") und Metasprache ("know that") zu unterscheiden: Umgang mit Objektsprache erfordert zwar in gewissem Sinne metasprachliche Kenntnisse (26), bewegt sich aber auf einer untergeordneten, sozusagen "praktischen" Ebene. Steiner hält eine Unterscheidung zwischen "mathematical ability" und "factual knowledge" (27) insofern für bedeutsam, als beide Bereiche oft nicht sauber voneinander getrennt werden, woraus seiner Meinung nach häufig ungerechtfertigte Vorwürfe an Operationen in formalen Systemen resultieren. In Bezug auf eine Ableitung mathematischer Theorien aus Logik bedeutet dies, daß es laut Steiner kein Hindernis darstellt, wenn bei einem derartigen Aufbau bestimmtes metasprachliches Wissen involviert ist, solange dies nicht seinerseits irgendwo "verankert" werden muß, z.B. in Mathematik, was einem Zirkelschluß gleichkäme.

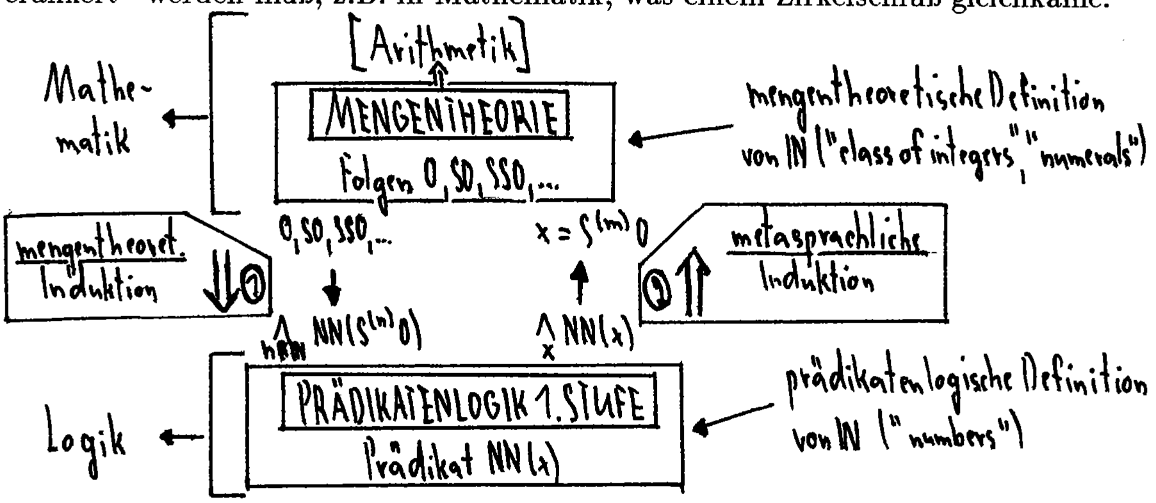

Abbildung 2.1 : Reduktionismus bei Mengentheorie und Prädikatenlogik

Diese Unterscheidung wird wichtig bei einer Diskussion von Parsons erstem Kritikpunkt (in Anlehnung an H.Poincaré), der Behauptung, daß mathematische Induktion als ein "irreduzibler Charakterzug mathematischen Wissens" angesehen werden muß (28). Als Beispiel wird die logizistische "Frege-Russell-Prozedur" herausgegriffen: "The Frege-Russell procedure defines two classes of natural numbers, such that mathematical induction is needed to show them identical. For we give explicit definitions in the set theory of '0', 'S0', 'S00'... and *also* define the predicate 'NN(x)'. How are we to be sure that 'NN(x)' is true of what 0, S0, SS0... are defined to be and only these?" (nähere Einzelheiten s.S.28). Offenbar geht es um zwei Arten des Aufbaus der natürlichen Zahlen (s.Abb. 2.1): Zum einen kann man von mengentheoretischen Formulierungen ausgehen (den Folgen '0', 'S0', ...), die als mathematische Notation eine unmittelbare Vorstufe zur regulären Arithmetik bilden (s. auch Kapitel 3 meines Aufsatzes), und aus dieser Richtung unter Zuhilfenahme der in der Mengentheorie gültigen Induktion zeigen, daß derartige Definitionen äquivalent sind zu einer prädikatenlogischen Sprechweise (s. z.B. Zermelo-Fraenkel-Mengentheorie). Auf der anderen Seite läßt sich - gemäß der ursprünglichen logizistischen Stoßrichtung - mit Prädikatenlogik erster Stufe und entsprechenden, auf den Aufbau einer Mengentheorie abzielenden Definitionen (wie z.B. der Klasseneigenschaft NN(x), v.a. aber den analog zur Regel der Induktion vorformulierten Peano-Axiomen) zeigen, daß jedes x, für das das Prädikat NN(x) wahr ist, eine Zahl (Folge 'S0') in der Mengentheorie bezeichnet (s. z.B. Russells "Principia Mathematica") (meines Erachtens manifestiert sich diese Unterscheidung bei Steiner, indem er einerseits - mengentheoretisch - die Bezeichnungen "class of integers" bzw. "numerals", andererseits - prädikatenlogisch - den Ausdruck "numbers" verwendet).

Hier nun kritisiert Parsons: Um von gesichertem mathematischem Wissen sprechen zu können,so Parsons, reiche es nicht aus, allein das "know how" in einer der beiden Objektsprachen zu beherrschen. Seine Behauptung ist, daß auf *eine* metasprachliche Regel nicht verzichtet werden kann, nämlich die der mathematischen Induktion.

Gemäß den beiden Beweisrichtungen in Abb. 2.1 kann das Problem in zwei Teile aufgespalten werden, wobei für eine Kritik gegen einen Reduktionismus besonders "Richtung zwei" interessiert. Parsons Argument läßt sich durch eine Widerspruchsannahme erläutern: Angenommen, es könnte eine Folge 'SO' konstruiert werden, die nicht durch Elemente einer Prädikatenlogik denotiert wird. Nun läßt sich per Induktion in Metasprache ein Beweis führen, der unzweideutig zeigt, daß ein solcher Fall prinzipiell auszuschließen ist (s.S.28) - was aber nur für einen *nicht*-logizistischen Mathematiker als sicher gelten kann. Für einen Logizisten, der seinem Anspruch gemäß - und nach Steiners Klassifizierung - Induktion als metasprachliche Regel bei einem solchen Beweis nicht verwenden darf, ist eine solche Sicherheit im vorhinein nicht zu erreichen. Mit anderen (Steiners) Worten: *Er* (der Logizist) hat das "know how" für eine Reduktion, obwohl nicht das "know that", während *wir* (nicht-logizistisch) u.U. nicht das "know how" besitzen (wenn wir nicht die "Principia Mathematica" beherrschen), dafür aber - per Induktion - das "know that" behaupten können (30).

Steiner bezweifelt die Stichhaltigkeit einer derartigen Argumentation. Er behauptet, daß ein logizistischer Mathematiker nicht mit zwei Konzepten für die natürlichen Zahlen arbeitet, deren Äquivalenz zu beweisen er gezwungen ist, sondern nur mit der prädikatenlogischen Variante. Wenn nach obigem Muster ein Gegenbeispiel zur prädikatenlogischen Konstruktion gefunden werden könnte, so würde ein logizistischer Mathematiker eben nicht mit den regulären natürlichen Zahlen arbeiten. Aus nichtlogizistischer (metasprachlicher) Sicht kann dies aber nicht geschehen, also - arbeitet der Logizist mit den natürlichen Zahlen: die Reduktion funktioniert.

Gleichermaßen übt Steiner Kritik an der Darstellung von "Richtung 1": Seiner Meinung nach ist kein "Konzept" in der beschriebenen Mengentheorie vordefiniert, sondern es gibt nur die beschriebenen Folgen. Um Richtung 1 - und damit eine Konsistenz der logizistischen Betrachtungsweise - zu zeigen, ist daher keine metasprachliche Induktion notwendig, da man die benötigte mengentheoretische Induktion mit Hilfe von

Prädikatenlogik innerhalb der Objektsprache beweisen kann (aus den Peano-Axiomen - wie es auch üblicherweise in Mathematik-Vorlesungen [für Physiker] gezeigt wird). Ein Beweis für Richtung 1 bewegt sich also allein in der Objektsprache (s.S.31).

Es läßt sich zusammenfassen:

- Richtung 2 ist als Prozeß einer objektsprachlichen Konstruktion durchaus statthaft, selbst wenn die Problematik einer (Un-)Sicherheit im Zusammenhang mit der Anerkennung von Induktion als einer Metaregel bleibt.
- Richtung 1 und 2 sind innerhalb einer rein logizistischen Betrachtungsweise konsistent.
- Auch Richtung 1 setzt innerhalb dieses logizistischen Gefüges keine weitere metasprachliche Regel voraus. (32)

Der Schwachpunkt einer logizistischen Konstruktion liegt bei Punkt 1; dennoch könnte man sich hier im Sinne eines Pragmatismus zufriedengeben: Solange das Konzept funktioniert, ist - für den Logizisten - kein Beweis erforderlich, der zugestandenermaßen metasprachlich wäre; und gerade der Nicht-Logizist weiß, daß es funktioniert!

Ich für meinen Teil glaube allerdings, daß dem logizistischen Programm mit einer solchen Deutung viel von seiner ursprünglichen philosophischen Schärfe genommen worden ist: Lehnt man eine Verwendung metasprachlicher Induktion innerhalb eines gültigen logischen Beweises ab - wie die Logizisten es tun müssen, zumindest solange, wie entsprechende Bemühungen um einen logischen Beweis noch nicht erfolgreich verlaufen sind -, so setzt man sich der Unsicherheit aus, u.U. in einem anderen Zahlensystem als den geläufigen natürlichen Zahlen zu arbeiten - oder aber man sieht einen Reduktionismus mangels logizistischer Beweisbarkeit gleich als gescheitert an (vgl. hierzu auch die Analogie zum Hilbertschen Formalismus, auf den Steiner im Laufe des Kapitels mehrmals Bezug nimmt). Verringert man aber den logizistischen Anspruch, wie Steiner es vorschlägt, von dem einer Eineindeutigkeit zwischen gewissen Teilen der Logik und der auf diese zu reduzierenden Mengentheorie auf den einer einfachen Implikation im Sinne von Richtung 2, Abb.2.1, so liegt meines Erachtens keine logizistische *Reduktion*, sondern "nur noch" eine rationale *Rekonstruktion* vor.

Man beachte den Unterschied: "Als *Logizismus* wird die Auffassung bezeichnet, daß die Mathematik auf Logik *zurückführbar, also nichts anderes als ein Teil der Logik sei*" (s.[1], S.91) - das bedeutet meines Erachtens den Anspruch, bei erfolgreicher Reduktion epistemologisch auch ohne Mathematik auskommen zu können, eine Auffassung, wie sie in anderer Form auch von Quine vertreten wird (als "neologizistischer abgeschwächter Reduktionismus", s. Steiners Buch, Kapitel 2, S.71f) und wie sie Steiner später in Anbetracht von Mathematik als eigenständiger Wissenschaft (von platonischen Objekten, s.S.87) kritisiert. Dagegen versteht z.B. E.Scheibe (in [5], S.96) unter "rationaler Rekonstruktion ... das Ergebnis eines Vorganges, bei dem eine Sache als das, was jeweils zu rekonstruieren ist, durch eine andere, eben die Rekonstruktion, *ersetzt* wird. Dabei ist dasjenige, was zu rekonstruieren ist, die *eigentlich primäre Erkenntniswirklichkeit*"; oder für den Punkt, den ich hier betonen will, noch deutlicher: "Grundlegend sind zunächst als die beiden Rekonstruktionspartner einmal das, was jeweils rekonstruiert wird - das zu rekonstruierende *Original* -, und zum anderen seine *Rekonstruktion* im Sinne des Resultats des Vorganges ..." (101) D.h. aber: Während man im Rahmen einer *Reduktion* den ursprünglichen mathematischen Gegenstand der Betrachtung (Zahlentheorie) zu ersetzen, eben auf seine eigentlichen Wurzeln zu reduzieren sucht ("... daß der logische Ort der natürlichen Zahlen richtig erkannt wurde ..." [1],S.93), muß bei einer *Rekonstruktion* allem Anschein nach das zu untersuchende "Original" als solches anerkannt werden - eine rationale Rekonstruktion kann nur zu einer im Rahmen der Möglichkeiten angemessenen, d.h. klärenden, u.U. verständlicheren Darstellung des Originals mit anderen Mitteln dienen.

Zumindest in meinen Augen ist es als Rückzugsgefecht anzusehen, wenn man gemäß der Steinerschen Deutung der Frege-Russell-Prozedur anstelle einer epistemologischen *Reduktion* "nur noch" eine rationale *Rekonstruktion* fordert und somit das Original als Erkenntnisquelle gezwungenermaßen anerkennt.

2.1.2 Induktion in Mathematik und Sprache

Ein weiterer Einwand Parsons zielt auf die Rolle von Induktion in der für einen Aufbau der Zahlentheorie grundlegenden prädikatenlogischen Definition der Klasseneigenschaft 'NN(x)' (in Steiners Notation)

$$NN(x)=(F)F0\&(y)[Fy\subset FSy]\subset Fx) \quad (33) \qquad \text{(Peano-Axiom)}$$

Parsons kritisiert in zweifacher Hinsicht:

(1) Die gegebene Definition kann nicht ohne eine vorausgegangene induktive Erzeugung sprachlicher Begriffe verstanden werden. (33/34)

(2) Ebenso setzt ein Verständnis des Allquantors eine Vertrautheit mit gewissen elementaren induktiven Definitionen voraus. (34)

Steiner wirft Parsons vor, daß er in beiden Fällen die offensichtliche Imprädikativität der Definiton vernachlässigt habe. Daraus aber folgt: Wenn man schon diese Art von Zirkel *innerhalb* der Definition widerspruchslos akzeptiert hat, dann kann man nicht gleichzeitig kritisieren, daß bei *Formulierung* der Klasseneigenschaft linguistische Induktion - und damit eine ähnliche Imprädikativität - vorausgesetzt wird. Deutet man Parsons Kritik gutwillig dahingehend, daß nicht ein alltagssprachliches Verständnis von Induktion zur Formulierung eines Induktionsprinzips in Mengentheorie oder Prädikatenlogik vorausgesetzt wird, sondern nur eine "Idee von Induktion" in dem Sinne, daß der Grundgedanke des Verfahrens - u.U. anhand von Beispielen - begriffen worden ist (35), so müßte die zugrundeliegende Perspektive kritisiert werden: Eher - so Steiner - ist umgekehrt eine sprachliche Formulierung von Induktion

Ersatz S.9

2.1.2 Induktion in Mathematik und Sprache

Ein weiterer Einwand Parsons zielt auf die Rolle von Induktion in der für einen Aufbau der Zahlentheorie grundlegenden prädikatenlogischen Definition der Klasseneigenschaft 'NN(x)'

$$NN(x)=(F)F0\&(y)[Fy\subset FSy]\subset Fx) \quad (33) \qquad \text{(Peano-Axiom)}$$

Parsons kritisiert in zweifacher Hinsicht:

(1) Die gegebene Definition kann nicht ohne eine vorausgegangene induktive Erzeugung sprachlicher Begriffe verstanden werden. (33/34)

(2) Ebenso setzt ein Verständnis des Allquantors eine Vertrautheit mit gewissen elementaren induktiven Definitionen voraus. (34)

Steiner wirft Parsons vor, daß er in beiden Fällen die Imprädikativität der Definiton vernachlässigt habe. Daraus aber folgt: Wenn man schon diese Art von Zirkel *innerhalb* der Definition widerspruchslos akzeptiert hat, dann kann man nicht gleichzeitig kritisieren, daß bei *Formulierung* der Klasseneigenschaft linguistische Induktion - und damit eine ähnliche Imprädikativität - vorausgesetzt wird. Deutet man Parsons Kritik gutwillig dahingehend, daß nicht ein alltagssprachliches Verständnis von Induktion zur Formulierung eines Induktionsprinzips in Mengentheorie oder Prädikatenlogik vorausgesetzt wird, sondern nur eine "Idee von Induktion" in dem Sinne, daß der Grundgedanke des Verfahrens - u.U. anhand von Beispielen - begriffen worden ist (35), so müßte die zugrundeliegende Perspektive kritisiert werden: Eher - so Steiner - ist umgekehrt eine sprachliche Formulierung von Induktion ohne ein vorhergehendes Verständnis mathematischer Induktion nicht vorstellbar. Andererseits erscheint plausibel, daß nicht unbedingt ein (mathematisches) "know that" vorhanden sein muß, um ein (sprachliches) "know how" vorweisen zu können. U.U. ist daher eine ganz andere Sichtweise angebracht, die eine enge Verzahnung von mathematischen und alltagssprachlichen Formulierungen in der Geneälogie von Induktion deutlich macht und die sich an dem Wittgensteinschen Gedanken orientiert, daß sich - analog zu anderen Begriffsbildungen - auch die Regel der Induktion durch Umgang mit und Gebrauch von Sprache etabliert hat (36/37). (...)

2.1.3 Induktion und modus ponens

Parsons letzter Einwand bezieht sich auf eine Vergleichbarkeit von objektsprachlicher Induktion und modus ponens: Angenommen, es kann zum einen über objektsprachliche Induktion eine Aussage *(x)Fx* bewiesen werden, zum anderen per iterierter Anwendung des modus ponens *Fx* für ein bestimmtes festes, aber beliebiges x: dann, so Parsons These , folgt die Konsistenz beider Beweisarten im Hinblick auf Einzelfälle (festes x)

Ersatz S. 9

nicht aus Logik oder Mengentheorie (39). Steiner begegnet diesem Einwand im Sinne der Würdigung von Richtung 2 in 2.1.1.: Da die logizistische Betrachtungsweise per se - wie gezeigt - konsistent ist, besteht nicht die Gefahr eines Widerspruchs für einen Mathematiker, der die Axiome kennt; und selbst wenn tatsächlich eine der beiden (Re-)Konstruktionsmethoden versagen sollte - es bliebe immer noch *ein* zulässiger Weg, um Fx für jeden Einzelfall zu beweisen (40).

2.2 Epistemologische Kritik Wittgensteins: Überschaubarkeit von Beweisen

L.Wittgensteins Kritik am Reduktionismus besteht v.a. in einem Angriff auf (3a/b) in 2.1.: Verfolgt man einen Beweis in Russells Notation, so kann nur unter Voraussetzung von über reine Logik hinausgehendes Wissen von Überschaubarkeit gesprochen werden. Anders formuliert: Wittgenstein behauptet, daß nicht alle nicht-logischen "Abkürzungen" aus einem Beweis entfernt werden können und er dennoch ein Beweis bleibt - denn für Wittgenstein ist ein Beweis etwas, das den Leser tatsächlich überzeugen kann (41). Fordert man man anstelle einer Überschaubarkeit für den ganzen Beweis nur eine Überschaubarkeit von einzelnen Beweisschritten, so muß man einer Vielzahl von Einwänden entgegentreten:

- der Möglichkeit eines "Gestaltwandels" des übrigen Beweises beim Vertiefen in einen einzelnen Beweisschritt (41) (s. z.B. ...)
- der Befürchtung, daß selbst *ein* Beweisschritt nicht überschaubar ist
- daß aus "einen Beweis lesen" nicht folgt zu wissen, was bewiesen worden ist: U.U. ist das bewiesene Theorem selbst nicht überschaubar bzw. man hat zwar den Beweis im einzelnen verstanden, dafür aber den Überblick im ganzen verloren
- daß bezüglich einer Überschaubarkeit (von Einzelschritten) nicht mehr von einer Äquivalenz zwischen mathematischem und logischem Beweis gesprochen werden kann: Eine Identität der Beweise sei schon deshalb nicht garantiert, weil der mathematische sich als überschaubar erweisen könnte, der logische dagegen nicht (42)

Was mir bei Steiners Darstellung der Wittgensteinschen Kritik fehlt, ist allerdings eine konkrete Definition von Überschaubarkeit: Soll Überschaubarkeit ein Verständnis für große grundlegende Zusammenhänge bedeuten? Und wo sind da die Grenzen? Was wäre z.B. mit Überschaubarkeit bezüglich einer Rechenoperation wie der Addition mehrerer natürlicher Zahlen, bei der es bekanntermaßen nicht ~~niemandem~~ gelingt, mehr als jeweils *zwei* Zahlen gleichzeitig zu addieren? (eine Reihe fortsetzen?...) Meiner Meinung nach birgt eine derartig unvollständige Klärung des Grundbegriffs Schwierigkeiten bezüglich einer angemessenen Diskussion der Wittgensteinschen Argumente.

- der Möglichkeit eines "Gestaltwandels" des übrigen Beweises beim Vertiefen in einen einzelnen Beweisschritt (41) (s. z.B. [6], Teil 2, Abschnitt XI, S.518 ff - dort unter dem Begriff "Aspektwandel"; oder auch [4], Kapitel 10, S.123 ff - visueller Gestaltwandel als Umwandlungen des Sehbildes bei normalwissenschaftlicher Ausbildung bzw. als Umbruch bei einem Paradigmenwechsel)
- der Befürchtung, daß selbst *ein* Beweisschritt nicht überschaubar ist ([7], Teil 3, S.144)
- daß aus "einen Beweis lesen" nicht folgt zu wissen, was bewiesen worden ist: U.U. ist das bewiesene Theorem selbst nicht überschaubar bzw. man hat zwar den Beweis im einzelnen verstanden, dafür aber den Überblick im ganzen verloren
- daß bezüglich einer Überschaubarkeit (von Einzelschritten) nicht mehr von einer Äquivalenz zwischen mathematischem und logischem Beweis gesprochen werden kann: Eine Identität der Beweise sei schon deshalb nicht garantiert, weil der mathematische sich als überschaubar erweisen könnte, der logische dagegen nicht (42)

Was mir bei Steiners Darstellung der Wittgensteinschen Kritik fehlt, ist allerdings eine konkrete Definition von Überschaubarkeit: Soll Überschaubarkeit ein Verständnis für große grundlegende Zusammenhänge bedeuten? Und wo sind da die Grenzen? Was wäre z.B. mit Überschaubarkeit bezüglich einer Rechenoperation wie der Addition mehrerer natürlicher Zahlen, bei der es bekanntermaßen nicht gelingt, mehr als jeweils *zwei* Zahlen gleichzeitig zu addieren? Eine derartig unvollständige Klärung des Grundbegriffs birgt meiner Meinung nach Schwierigkeiten bei einer Diskussion der Wittgensteinschen Argumente.

2.2.1 Überschaubarkeit von "Primitiver Notation"

Im Sinne Wittgensteins läßt sich zwischen "gewöhnlicher Arithmetik" und "Russellscher Arithmetik" unterscheiden: Während gewöhnliche Arithmetik mit dem Dezimalsystem identifiziert wird, entspricht Russells Arithmetik einer Notation, welche die bereits beschriebenen Folgen 'S0' verwendet (42/43). Anhand eines einfachen Beispiels läßt sich Wittgensteins Auffassung demonstrieren, daß gewisse Rechnungen im Dezimalsystem noch überschaubar sind, während in Russells Schreibweise deren Unüberschaubarkeit evident zu sein scheint (42/43).

Steiner erwidert, daß mit dem Dezimalsystem selbst nicht explizit eine Rechenmethode vorgegeben wird, sondern daß es - ähnlich Russells primitiver Notation - nur zur Erzeugung einer bestimmten Zahldarstellung dient. Eine Vereinfachung resultiert nur aus einer nachträglichen Anwendung verschiedener Rechengesetze innerhalb dieser Darstellung (Kommutativ-, Assoziativ-, Distributivgesetz). Insofern sollte es möglich sein, ohne Verletzung logizistischer Regeln eine einfache Rechnung in primitiver Notation *und* Dezimalschreibweise zu formulieren (s.Bsp. auf S.44). Allerdings besteht jetzt die Gefahr, mit den in Dezimalschreibweise verwendeten Multiplikationszeichen und Exponent ein fremdes Konzept, eine neue Rechenart eingeführt zu haben, die vorher in Russells Sprache nicht definiert war: Faktisch, so Wittgenstein, bedeutet das Zeichen für "Exponent" nicht nur eine pure Abkürzung der Multiplikation, sondern impliziert zusätzlich ein *Faktoren zählen* (45) - was sich in der Rolle des Exponenten als *Variable* manifestiert, wodurch eine andere Art von Multiplikation vorgegeben wird als "k-faches multiplizieren", k als *Konstante* (46/47). Derartige neue Rechenarten lassen sich aber nach Quine durch Iterationen in "λ-Notation" mengentheoretisch definieren (s. dazu S.47; dort wird das Problem auf die Existenz einer Folge zurückgespielt). Also ist es zwar gerechtfertigt, zu behaupten, daß durch die Exponentialdarstellung eine neue Rechentechnik eingeführt wird, doch kann diese innerhalb von Mengentheorie, d.h. objektsprachlich, expliziert werden. Verwendet man die auf diese Weise neu formulierte "fast-primitive Notation" in dem propagierten System von primitiver Notation und Dezimaldarstellung, so wird laut Steiner die problematische Dezimalrechnung in Russells System nicht nur explizierbar, sondern auch überschaubar (49).

Mir scheint, Wittgenstein könnte entgegnen, daß es sich hierbei um einen "Taschenspielertrick" handelt: Da Russells primitive Notation allem Anschein nach nicht überschaubar ist und Dezimaldarstellung als überschaubar deklariert wird, bietet Steiner eine Vermischung in Gestalt einer "fast-primitiven Notation", die "halbüberschaubar", wenn auch explizierbar ist und im Rahmen eines verschwommenen Begriffs von Überschaubarkeit je nach Geschmack gerade noch akzeptiert werden kann. Allerdings würde eine ausführlichere Diskussion dieser Problemlage, zumindest anhand der Wittgensteinschen Ansätze für "Überschaubarkeit" in [7] - während Steiner selbst gar keine Hinweise auf eine engere Fassung des Begriffs gibt -, den Rahmen dieses Aufsatzes bei weitem übersteigen: Folgt man nämlich [7], so finden sich zahlreiche Passagen, in denen Wittgenstein verschiedene Seiten dieses Begriffs anspricht; schematisch:

- S.159: "'Der Beweis muß übersehbar sein' - heißt: wir müssen bereit sei, ihn als Richtschnur unseres Urteilens zu gebrauchen." (Verweis auf Sprachgebrauch?)
- S.170: "'Der Beweis muß übersehbar sein' heißt ... wir sehen im Beweis den Grund dafür zu sagen, daß es sich so ergeben *muß*." ("Überzeugungskraft" eines Beweises?)
- S.174: "Ich möchte sagen, daß, wo die Übersehbarkeit nicht vorhanden ist, also für einen Zweifel Platz ist, ob wirklich das Resultat dieser Substitution vorliegt, der *Beweis* zerstört ist ..." (Verstehen/Nachvollziehen eines Beweises?)
- S.187/246: Reproduzierbarkeit von Beweis und Resultat im Vergleich mit der eines Experiments

Um den Steinershen Anspruch einer Überschaubarkeit zu überprüfen, müßte daher dieses Bündel von Kriterien exakter formuliert und auf die fragliche fast-primitive Notation angewandt werden.

Außerdem bleibt, insbesondere im Vergleich zu prädikatenlogischen Formulierungen, wie sie zum Ende von Abschnitt 3 (49ff) diskutiert werden, fraglich, ob die von Steiner bevorzugte Quinesche Darstellung zum einen überhaupt noch als äquivalent zu Russells Notation betrachtet werden kann, vgl. z.B. [7], S.143: "Wenn man eine nicht übersehbare Beweisfigur durch Veränderung der Notation übersehbar macht, dann schafft man erst einen Beweis, wo früher keiner war"; zum anderen wäre anzuzweifeln, ob sie als *neue* Notation noch in jeder Hinsicht strenge logizistische Maßstäbe erfüllt (Rückführung auf *Logik*). Denn analog zur bereits diskutierten streng logischen Version (Russells) könnte man auch Quines "Neologizismus" vorwerfen, "daß die neue Logik nicht einmal als Nachfolgetheorie der entgeometrisierten Mathematik aufgefaßt werden konnte. Als solche kann aus der Sicht der akademisch praktizierten Mathematik am ehesten eine axiomatisierte Mengenlehre gelten" (s.[4], S.109); oder auch in [3]: "In erster Linie kann und muß man die einfache Typentheorie als ein spezielles axiomatisches System der allgemeinen Mengenlehre ansehen, und aus dieser Sicht besteht das Verdienst des Logizismus darin, das umfangreiche Begriffssystem der Mathematik auf ein System von wenigen mengentheoretischen Grundbegriffen zurückgeführt ... zu haben." (S.317)

2.2.2 Überschaubarkeit in Prädikatenlogik erster Ordnung

Steiner vermutet, daß Wittgenstein bei seiner Kritik nicht an Russells primitive Notation, sondern an Darstellungen in Prädikatenlogik erster Stufe gedacht hat (Quantorenschreibweise). Im Hinblick auf eine Überschaubarkeit könnte einer ersten Interpretation besonders die Deutung der Existenzquantoren (s. insbesondere S.49) Schwierigkeiten bereiten. Ein zweiter Interpretationsversuch müßte sich auf die Indizes an den Existenzquantoren als natürliche Zahlen beziehen, wodurch bereits wieder Arithmetik involviert und induktive meta-mathematische Zugriffe möglich gemacht werden würden (50). Also scheint Wittgensteins Kritik begründet, daß es sich bei rein prädikatenlogischen Darstellungen nicht um gewöhnliche, rein logisch explizierbare Abkürzungen handelt. Wenn Reduktion nur auf diesem Weg erfolgen könnte, wäre der Versuch als gescheitert zu betrachten; allerdings, so Steiner, bliebe damit unberücksichtigt, daß die weniger problematische, eben beschriebene fast-primitive Notation (s.2.1.2.) erfolgreich ist.

Zusammenfassend läßt sich konstatieren: Wittgensteins falsche Annahmen waren, daß

(a) Arithmetik direkt auf Prädikatenlogik erster Ordnung zurückgeführt werden muß (Quantorenproblem)

(b) er die Nützlichkeit einer primitiven Darstellung im Hinblick auf eine "fast-primitive Notation" unterschätzt hat

Laut Steiner ist damit auch Wittgensteins Kritik nicht zu verifizieren.

2.3 Definitionen in Logik

Bereits im letzten Kapitel war an manchen Stellen die Problematik von Abkürzungen bzw. Definitionen in Beweisen oder Darstellungsarten angesprochen worden. Sie gilt es im folgenden genauer zu analysieren: Muß arithmetisches Wissen vorausgesetzt werden, um ein Theorem auf der Basis eines "Beweises mit Abkürzungen" verstehen zu können? (57) Insbesondere im Hinblick auf die Problematik induktiver Definitionen ist Wittgenstein Verfechter einer strengen Auffassung von logischem Beweis: Ein logischer Beweis darf keine Definitionen enthalten, sondern nur in einer Art "primitiver Notation" gegeben werden, in der Definitionen ausgeschrieben bzw. ersetzt worden sind (ähnlich s. Quine, Church, S.58).

Bei einer genaueren Analyse des Definitionsbegriffs können zwei Arten von Definitionen unterschieden werden:

(1) "explicative definitions" (Explikationen, explizite Definitionen, s.[3], S.116): "Definitions of this kind 'are intended to extend the [object] language by introducing a new notation not formerly present in it' " (58), d.h. diese sind als analytische Zusammenfassungen zu einem neuen Begriff zu verstehen.

(2) "stipulative definitions" (im folgenden als Terminus technicus gebraucht; Festsetzungen, Feststellungsdefinitionen): Aufgabe dieser Definitionen ist es, den Gebrauch eines definierten Terms zu definieren. Sie sind daher nicht als inhärenter Bestandteil einer gegebenen Objektsprache anzusehen, sondern gehören in eine Erweiterung derselben. (59) "Stipulative definitions are therefore unlike so-called 'analytic' truths ... for the latter truths allegedly depend on *established* usage, while the former *establish* usage." (59) (schräg von mir)

2.3.1 Stipulative Definitionen und Konventionalismus

Obwohl stipulative Definitionen - so Steiner - per Konvention wahr sein können, ist ihre Wahrheit nicht zwingend vorgegeben, verglichen mit derjenigen der analytischen Explikationen(59). Als Beispiel diskutiert Steiner die Festsetzung

"x is *Kolor* if and only if x has the same color that Jack's car in fact has.(Df.)" (59)

Diese Aussage ist nicht nur deswegen nicht immer wahr bzw. analytisch, weil für eine Gültigkeit die Existenz von Jacks Wagen Voraussetzung ist, sondern Steiner versucht zu zeigen, daß selbst bei Ergänzung der Definition durch "If Jack's car exists,..." (60) aus der Extension der Farbe weitere mögliche Fehler resultieren können: Betrachtet man eine "mögliche Welt" (z.B. bei Nacht oder wenn der Wagen mit einer Staubschicht bedeckt ist), in der Jacks real existierender Wagen eine andere Farbe aufweist als er "tatsächlich" ("in fact") besitzt, so muß man konstatieren:

- " 'x is *Kolor*' - true"
- " 'x has the same color as Jack's car' (meine Ergänzung: '*in fact* has') - false" (60)

Derartige durch die Festsetzung bedingte "Zufälligkeiten der Farbe" können nur über Konventionen abgefangen werden (gleiches gilt für Festsetzungen in Mathematik): "And stipulative definitions, contingent truths though they may be, are nevertheless true by convention, and hence knowable a priori." (60)

Meiner Meinung nach ist Steiners Argumentation hier etwas unsauber: Zu sehr wird versucht, das Einbringen von Konventionen auf Mängel der Definitionen zu schieben. Meines Erachtens liegt ein Defizit aber weniger in der Form der Definition selbst als vielmehr darin, daß das in Anschlag zu bringende Hintergrundwissen nicht in ausreichendem Maße vereinbart worden ist: In Abhängigkeit von einer Beschaffenheit der Welt, in der man Jacks Auto betrachtet, ist die Farbe von Jacks Wagen sicherlich als "zufällig" anzusehen, *nicht* aber die Wahrheit der stipulativen Definitionen, solange man nicht vorher vereinbart hat, was unter dem Zusatz *"in fact"* zu verstehen ist. Zwar liegt es nahe, *"in fact"* als Hinweis auf "Normalbedingungen" (wissenschaftlich oder im Sinne von Alltagserfahrung - "Tageslicht" o.ä.) zu deuten, doch sollte es meiner Ansicht nach genausogut möglich sein, es auf die jeweilige "mögliche Welt" zu beziehen, in der sich ein Betrachter von Jacks Wagen jeweils befindet (wenn er Jacks Wagen z.B. bei Nacht beobachtet - man interpretiere *"in fact"* auch aus der Sicht eines Gelbsüchtigen oder eines Farbenblinden!). Innerhalb einer solchen "möglichen Welt" wäre daher die Zuordnung einer Farbe zu der Farbe "Jack's car *in fact* has" - die Existenz von Jacks Wagen vorausgesetzt (in diesem Punkte gebe ich Steiner recht) - eindeutig: Ein konventionelles Element käme nicht durch Unsauberkeit der stipulativen Definitionen ins Spiel, sondern durch die Vereinbarung einer gemeinsamen Ausgangsbasis, durch Einigung auf eine "Alltagswelt". Insofern kann ich Steiner zwar zustimmen, wenn er erklärt: "Stipulative definitions fix the reference of a singular term, the extension of a general term, without necessarily fixing 'meaning' " (60) - allerdings nur im Hinblick auf zugrundeliegende und noch zu explizierende "Normalbedingungen", die per Konvention vereinbart werden müssen. So gelangt man auf einem gewissen Umweg trotz allem wieder zu Steiners wesentlichem Punkt für den Fortgang der Diskussion, nämlich auf die Bedeutung von Konventionen für die Wahrheit von stipulativen Definitionen.

2.3.2 Stipulative Definitionen und Reduktionismus

Steiner orientiert sich im folgenden an Darstellungen Quines, differenziert jedoch zwischen einem von Quine vermuteten streng axiomatisch-konventionalistischen Aufbau der Mengentheorie und dem in 2.2.1. favorisierten Ansatz in λ-Notation ("fast-primitiver Notation"): Im Zuge des letzteren Aufbaus war nur von Definitionen gesprochen worden, durch die ein neuer Gebrauch eingeführt wird (s.S.62 oben) und die daher als "wahr durch Festsetzung" angesehen werden können. Dies sei aber ein abgeschwächter konventionalistischer Standpunkt, dem u.U. auch Quine zustimmen würde (61/62).

Logizistische Definitionen, wie z.B. die der Addition (62), könnten allerdings auch noch aus anderem Blickwinkel nicht in erster Linie als stipulative Definitionen, sondern - in Umkehr der Perspektive - als Übungen in Explikation von Rechenarten angesehen werden, deren Gebrauch (in gewöhnlicher Mathematik) bereits etabliert ist. Dies führt auf eine erneute Betonung der Unterscheidung von "how" und "that" bzw. "what": "how", so Steiner, bedeutet nichts weiter als "ability to explicate mathematical terms in the idiom of logic. The philosopher, the logicist, must make do with the preexisting use of mathematical terminology..."(62/63). "What" dagegen repräsentiert den logizistischen Anspruch: "(that) the mathematician will lose nothing by learning *nothing* but

(1) the axioms and rules of logic

(2) various definitions, *stipulated* as true" (63)

(vgl. dazu die Darstellung in 2.1. und insbesondere meine Kritik)

Zusammenfassend läßt sich daher die Rolle von stipulativen Definitionen beim logizistischen Aufbau einer Mengentheorie bzw. bei logischen (logizistischen) Beweisen mit der von Axiomen vergleichen: Beide sind per Konvention wahr - selbst wenn man für stipulative Definitionen gemäß 2.3.1. vielleicht von einem "abgeschwächten Konventionalismus" sprechen könnte -, und daher können Definitionen als Ergänzung des logischen Vokabulars auch nicht ein "a priori" zerstören. (64)

In Anlehnung an die Diskussion in 2.2. zieht Steiner hieraus Nutzen für eine weitere Bestätigung der Überschaubarkeit von Beweisen: Immerhin wurden ja die Formulierungen wesentlicher Rechenoperationen in fast-primitiver Notation als stipulative Definitionen verstanden. Diese aber, so Steiner, stellen keine "Abkürzungen" dar ("definitions are not abbreviations"(64)) und müssen daher auch nicht innerhalb eines Beweises expliziert werden. Da aber ein solcher "abgekürzter" Beweis in fast-primitiver Notation bereits als "überschaubar" akzeptiert worden war, besteht keine Schwierigkeit mehr, einen derart modifizierten Beweis auch im Sinne eines Reduktionismus als echten Beweis anzuerkennen (64).

2.3.3 Konventionalismus bei Quine und Wahl von Postulaten

Bei einer doch so deutlichen Betonung einer konventionalistischen Sichtweise ist Steiner gezwungen, sich zum Schluß des Kapitels mit Quines Warnung bezüglich "Wahrheit durch Konvention" auseinanderzusetzen: Quine empfiehlt, den Wirkungsbereich eines Konventionalismus auf Postulate an der "Vorderfront" wissenschaftlicher Tätigkeit zu beschränken. Denn überträgt man ein solches Charakteristikum auf Sätze innerhalb etablierter Theorien, so führt dies leicht zu einem Übermaß an Konventionen, die die Theorie "überschwemmen" und nachträglich jedes beliebige Postulat als wahr oder falsch erscheinen lassen können - man setzt sich der Gefahr eines Relativismus aus (65).

Steiner weist eine Gültigkeit dieser Betrachtungsweise für den dargestellten Aufbau der Mengentheorie zurück. Ausgehend von der Zielsetzung, daß eine Rückführung von Mengentheorie auf Logik/fast-primitive Notation nur noch im Rahmen einer Rekonstruktion plausibel gemacht werden muß. zeigt Steiner (über Peano-Axiome und Modelltheorie, s. S.68), daß sich, entgegen einer relativistischen Auffassung, gewisse Definitionen als unentbehrlich für eine Konstruktion deklarieren lassen und somit - im Gegensatz zu einem beliebig erscheinenden Wechsel von Postulaten - vernünftigerweise beibehalten werden sollten (65/66). Er tritt damit der Auffassung Quines entgegen, die nicht nur besagt, daß jedes Postulat "per Konvention" im Laufe der Zeit verändert oder verworfen werden kann, sondern, daß es letztlich sogar unwissenschaftlich sei, bestimmte Grundsätze als für immer "wahr per Konvention" aufrecht halten zu wollen (67)(obwohl dies in physikalischen Theorien häufig so praktiziert wird, s. z.B. Energie-/Impulserhaltungssatz).

2.4 Zusammenfassung

Nach Steiners bisheriger Darstellung gibt es keine epistemologischen Einwände gegen ein logizistisches Programm: Weder kann Zirkularität in der "Reduktion" von Mengentheorie auf Prädikatenlogik nachgewiesen werden (Parsons) noch läßt sich eine mangelnde Überschaubarkeit logizistischer Beweise kritisieren (Wittgenstein).

Dennoch ist ein entscheidender Einwand bislang nicht diskutiert worden, der schließlich zu Steiners Ablehnung des logizistischen Programms führen muß: daß die epistemologische Sicherheit der Arithmetik bei einer "Reduktion" durch die größere Unsicherheit der Mengentheorie beeinträchtigt wird.

Kapitel 3

Spielarten des logizistischen Programms

Während sich Steiner im ersten Kapitel eines epistemologischen Reduktionismus angenommen hatte, der sich auf ein Zusammenwirken von Prädikatenlogik und Mengentheorie beschränkte (A) - obwohl im Laufe der Diskussion der Schwerpunkt bereits weitgehend in Richtung Mengentheorie verlagert worden war -, wendet er sich nunmehr einer Behandlung der Reduktion von Arithmetik auf Mengentheorie zu (B) (s.Schema).

$$\text{Logik} \overset{(A)}{\Longrightarrow} \text{Mengentheorie} \overset{(B)}{\Longrightarrow} \text{Arithmetik}$$

Insbesondere gilt es, Quines Vorwurf zu untersuchen, Mengentheorie sei kaum als streng logisch, erst recht nicht als analytisch zu betrachten; d.h. der Anspruch einer Reduktion im Sinne von (B) wird aufrechterhalten, (A) allerdings unter dem Aspekt kritisiert, daß Mengentheorie epistemologisch unsicherer sei als Logik selbst, was dazu führt, einen logizistischen Reduktionismus im strengen Sinne abzulehnen (71) (Anm.: Die Einleitung von Kapitel 2, auf die ich mich hier beziehe, ist bezüglich der dargestellten reduktionistischen Stoßrichtung, wie ich meine, sehr undeutlich formuliert; zudem wird im gesamten Kapitel die im Vorwort so betonte Wendung gegen einen Logizismus nicht sonderlich hervorgehoben). Stärkere Kritik erfolgt von seiten P.Benacerrafs, der nicht einmal eine Ableitung (B) für sinnvoll hält, da Mengentheorie im ganzen als "kränklich" angesehen wird (71).

3.1 Quines Neologizismus: Ontologischer Reduktionismus

Trotz Kritik logizistischer Positionen hält Quine eine Reduktion im Sinne von (B) für philosophisch relevant. Er sieht in der Möglichkeit, die natürlichen Zahlen loszuwerden, eine Art ontologisches Ökonomieprinzip: Immerhin läßt sich die "Welt einer Theorie" mittels Reinterpretation durch die "Welt einer anderen Theorie" darstellen - man kann mit nur *einer* Theorie auskommen (72). Zudem könnte eine "Explikation als Elimination" in manchen Fällen zur Klärung problematischer Begriffe beitragen (73). Steiner sieht in solchen Anwendungen keine großen Vorteile. Er bezweifelt eine Konsistenz von

(B), wie sie für (A) behauptet wurde, befürchtet einen Ballast an neuen, unnützen Fragen in Bezug auf Arithmetik (73) und kritisiert, daß das Problem der Unvollständigkeit der Mengentheorie (Kontinuums-Hypothese) auf Arithmetik übertragen werden würde (74). Quine akzeptiert, daß die von ihm bevorzugte Mengentheorie epistemologisch unsicherer ist als Zahlentheorie, für den Vorteil einer Reduzierung ontologischer Entitäten. Steiner dagegen weist darauf hin, daß man - unzweckmäßigerweise - dann auch im praktischen Umgang auf eine Theorie zurückgreifen müßte, die zwar mehr leistet als die alte reinterpretierte, bei der die Wahrscheinlichkeit für einen Zusammenbruch oder Inkonsistenzen aber weitaus höher anzusiedeln wäre als vorher (75).

Quine versucht, diesem Vorwurf zu entgehen, indem er zwei Wege angibt, um eine Reduktion einerseits zu ermöglichen, andererseits aber nicht ein angestammtes, bewährtes Kalkül verwerfen zu müssen. Ziel ist, nur einen eng begrenzten Bereich der Mengentheorie bei einer Ableitung der Arithmetik zu berücksichtigen bzw. nach Vorbild der Arithmetik so abzuändern, daß nicht nur eine Reinterpretation möglich wird, sondern auch eine Konsistenz gewahrt bleibt, ohne sich auf epistemologisch unsichere Teile der Mengentheorie beziehen zu müssen (76).

In einem ersten Versuch (*NN-Arithmetik*, S.77ff) sollen die natürlichen Zahlen per Induktionsprinzip sowie bestimmten mengentheoretischen Definitionen ("erbliche Menge", s.S.77) direkt aus mengentheoretischen Betrachtungen konstruiert werden. Allerdings wendet Steiner - wie ich meine, zu Recht - ein, daß hierbei eine imprädikative Definition eingebaut worden ist, die eine Rückführung selbst ohne Berücksichtigung eines zweifelhaften Auswahl- oder Unendlichkeitsaxiom fraglich erscheinen läßt (78/79). Außerdem wird eine Existenzaussage (in Bezug auf das beim Aufbau entscheidende Prädikat) benutzt, die selbst eine stärkere Behauptung zu sein scheint als das, was letztlich bewiesen werden soll (79).

"Letzte Anstrengungen" gelten einem zweiten Versuch (*Z-Arithmetik*, S.80ff): Anstelle Arithmetik organisch aus Mengentheorie abzuleiten, soll umgekehrt der Zählprozeß (über die Peano-Axiome) in "nicht-logizistischer" mengentheoretischer Version durch eine Art Rücktransformation vordefiniert werden (Einführung eines "primitiven Prädikats"). Dies führt laut Steiner zu einem unzweckmäßigen "Aufblähen" der alten Mengentheorie durch Hinzufügen neuer Axiome, so daß man gezwungen ist, von einer neuformulierten, speziell für einen Aufbau von Arithmetik benötigten Mengentheorie zu sprechen.

Es läßt sich zusammenfassen: "There are two ways to reduce the world of numbers to that of sets - either through an explicit but impredicative definition (*NN*), or through postulation of set-theoretical versions of the Peano postulates (Z). The former approach does purport to reduce the *theory* of sets but is unjustified because it involves us in epistemic risk ... since set theory is shakier than number theory. The latter version is not risky, just otiose. It involves the addition to our theory of infinitely many useless propositions." (84) Demzufolge plädiert Steiner dafür, fehlerfreie von fehlerhaften Theorien zu trennen und keine "verwässerte" oder unzweckmäßige Theorienbildung anzustreben - womit allerdings das Konzept einer mengentheoretischen Reduktion von

Arithmetik im Sinne von (B), s.3.1., und damit sowohl das logizistische Programm als auch Quines neologizistische Bemühungen endgültig als gescheitert betrachtet werden können (85/86).

3.2 Benacerraf: Mathematische Struktur als Objekt

Steiner schlägt eine neue Betrachtungsweise vor: Arithmetik als autonome Wissenschaft, ohne sie auf epistemologische oder ontologische Begründungsversuche stützen zu wollen. Dies impliziert allerdings eine Auffassung "(that) the natural numbers, the subject matter of the science, are objects in the same sense that molecules are objects." (87) Insofern sieht sich Steiner gezwungen, den Ansichten Benacerrafs entgegenzutreten, der nicht die Individualität von Elementen der Mathematik als "Objekte" hervorhebt, sondern vielmehr die Struktur, die sie miteinander teilen, in den Vordergrund rückt (vgl z.B. Isomorphie bei Vektorräumen). Zahleneigenschaften sind laut Benacerraf nicht objektgebunden, sondern Teil einer abstrakten Struktur. Zahlen selbst definieren daher nur Rollen innerhalb dieser Strukturen, und zwar nicht als Paradigmata für platonische Objekte, sondern als Stellvertreter der jeweils zu charakterisierenden Relation (89/90). Allerdings führen derartige Ansichten - abgesehen von inneren Widersprüchen innerhalb von Benacerrafs Darstellungen - schnell auf Interpretationsschwierigkeiten bezüglich eines einheitlichen Zahlbegriffs (89/90).

Obwohl gewisse Züge von Benacerrafs Position später im Rahmen einer Diskussion mathematischer Intuition von Steiner wiederaufgenommen werden, muß dessen Deutung des Zahlbegriffs von ihm abgelehnt werden - was wiederum Steiners These von Arithmetik als einer unabhängigen Wissenschaft zugute kommt, mit deren Hilfe derartige Probleme vermieden werden können.

Kapitel 4

Beweis und mathematisches Wissen

Mathematik wird im allgemeinen als deduktive Wissenschaft gepriesen, und dementsprechend gilt ein mathematischer Beweis als Garant für mathematisches Wissen. Betrachtet man Mathematik jedoch mit Steiner bezüglich ihres Gegenstandes als autonome Disziplin, so läßt dies vermuten, daß die Bedeutung von Beweisen für "Zahlen als Objekte" erheblich gemindert wird.

Um die Rolle, die ein mathematischer Beweis für mathematisches Wissen spielt, näher untersuchen zu können, nimmt Steiner drei Formulierungen als Ausgangspunkt:

(T1) "If someone knows a mathematical proposition, then *he* knows a *proof* of the proposition"

(T2) "If someone knows a mathematical proposition, then *he* knows that the proposition is *provable*"

(T3) "If someone knows a mathematical proposition, then *the* proposition is *provable*" (94) (Schrägstellung von mir)

Es gilt: T1=>T2=>T3. Ohne weiter auf die Bedeutung von T1 bis T3 einzugehen oder eine gegenseitige Bedingtheit zu erläutern (s. dazu S.94 f), soll betont werden, daß bei "T1 wahr" bzw. "T2 wahr" Beweis bzw. Beweisbarkeit als *verantwortlich* für mathematisches Wissen anzusehen ist (96). Während T1/T2 mit einem mathematischen Platonismus nicht vereinbar sind, läßt sich T3 durchaus im Sinne einer "Teilhabe" an mathematischem Wissen, dem "Erfassen" eines mathematischen Objektes, verstehen. Beansprucht man nicht für alle Fälle von mathematischem Wissen die Gültigkeit von T1 bis T3, so lassen sich abgeschwächte Formulierungen finden (s. T', S.96).

4.1 Was ist ein Beweis?

"Proof is formal proof"(96), d.h. in einem Beweis deduziert man von Prämissen eines formalen Systems. Sinngemäße inhaltliche Erläuterungen, die der allgemein akzeptierten Konvention der Formalisierbarkeit widersprechen, müssen daher als Beweis abgelehnt werden. Es zeigt sich allerdings, daß mathematische Theoreme nur durch Zusätze (die in sich konsistent sein müssen) "außerhalb" rein logischer Prämissensysteme bewiesen werden können (97): Steiner verwendet den Ausdruck *Standard-Prämissen* für einen Katalog von Kernsätzen, der sowohl gängige Axiome als auch grundlegende Theoreme enthält und der als geschichtlich wandelbares Gut einer Gemeinschaft von Mathematikern vertraut ist (meines Erachtens Anklänge sowohl an K.R.Popper (Methodologiebegriff) als auch an T.S.Kuhn (geschichtliche Wandelbarkeit von Methodologien, s.[4]). Ein Befürworter von T1 bis T3 muß im Rahmen dieser Behauptungen die Existenz einer Menge von Standard-Prämissen jeweils plausibel machen (99).

4.2 Was heißt "einen Beweis wissen"?

Kann man einen Beweis mit Hilfe von Standard-Prämissen in Logik erster Ordnung niederschreiben, so Church, dann weiß man den Beweis. Allerdings ist diese Bedingung nur *hinreichend*: Z.B. wäre denkbar, daß ein Mathematiker in der ihm vertrauten Sprache einen Beweis wüßte, ohne *notwendig*erweise in der Lage zu sein, ihn in Logik erster Ordnung niederzuschreiben (99). Dies legt nahe, sich der Dienste eines Logikers zu bedienen und ihn als eine Art "Hebamme" bzw. Übersetzer für den Mathematiker einzusetzen (100). Steiner spielt den Gedanken durch, daß beide zusammen einen Beweis ausarbeiten, dessen logische Korrektheit ein Kriterium für das "Wissen des Mathematikers um einen Beweis" abgeben soll (100ff). Dennoch kann dieses Konzept nicht aufgehen: Ist der formale Beweis nicht vollständig, so dürfte nicht zu lokalisieren sein, ob der Fehler beim Mathematiker (dessen Wissen gerade überprüft werden soll) oder beim Logiker liegt - ist der Logiker dumm, trägt er die Schuld; ist er aber über Gebühr schlau, so liefert er einen korrekten Beweis trotz mangelnder Angaben des Mathematikers, so daß selbst ein vollständiger Beweis keine Rückschlüsse auf das Wissen des Mathematikers zuläßt (101/102).

4.3 Beispiel: Wissen um ein mathematisches Theorem ohne "Beweis" oder "Beweisbarkeit"

Mittels eines Beispiels (in Anlehnung an G.Polya) sollen nunmehr die Behauptungen T1 und T2 widerlegt werden: Steiner zeigt, daß mathematisches Wissen im beschriebenen (prominenten) Fall nur per "Evidenz", d.h. über eine unzulässige induktive Beweistechnik anstelle einer mathematisch korrekten Deduktion, zustande kommt.

Ausgangspunkt der Betrachtung ist das von Bernoulli aufgeworfene Problem, den Wert der konvergenten Reihe $\sum_{x=1}^{\infty} \frac{1}{x^2}$ zu berechnen (103). Die Lösung stammt von Euler (103ff). Unzulässigerweise verwendete dieser jedoch den Fundamentalsatz der Algebra, der nur für Polynome *endlichen* Grades bewiesen ist, um das Resultat einer Taylorentwicklung *unendlichen* Grades umzuformen. Es handelt sich bei diesem Schritt also nur um eine Analogie, um eine gewagte Übertragung analytischer Methoden für finite Gleichungen auf infinite, bisher ungelöste Probleme, die sich mathematisch zumindest zu Eulers Zeiten nicht rechtfertigen und höchstens im Sinne einer "naturwissenschaftlichen Induktion" plausibel machen ließe (107). Obwohl Euler gute Gründe für mathematisches Wissen angeben kann, wie z.B. Plausibilität, Ästhetik und Einfachheit der Herleitung, erfolgreiche Anwendung des Verfahrens bei der Lösung ähnlicher mathematischer Probleme sowie Konsistenz des Resultats in Bezug auf mathematisches Hintergrundwissen (104/105), darf diese Ableitung daher nach den für Mathematiker allgemein gültigen Regeln (Standardprämissen) nicht als schlüssiger Beweis anerkannt werden - vielmehr hat Euler, ohne es zu wissen, den Weg zu einer neuen analytischen Methode gewiesen (die es mit anderen Mitteln nachfolgend zu formulieren und zu begründen galt). Damit aber sind T1 und T2 widerlegt: Weder hat Euler im strengen Sinne einen *Beweis* für seine Formel gewußt, noch konnte er vermuten, wie sie über kurz oder lang *beweisbar* sein sollte. Die verbleibende Behauptung T3 aber stellt kein Hindernis für einen mathematischen Platonismus dar.

Ziel des dritten Kapitels war es, die verbreitete Auffassung von Mathematik als deduktiver Wissenschaft und die damit verbundenen Vorstellung einer Verknüpfung von mathematischem Wissen und Beweis fragwürdig erscheinen zu lassen, um somit den Boden für eine platonistische Auffassung zu bereiten, wie sie im letzten Kapitel skizziert wird.

Kapitel 5

Platonismus und mathematische Erkenntnis

Steiner unterscheidet zwei Arten von Platonismus:

Ontologischer Platonismus: Dieser Auffassung gemäß sind wahre mathematische Sätze Beschreibungen unendlich vieler tatsächlich existierender immaterieller mathematischer Objekte. Dementsprechend kann die Frage nach der Wahrheit eines ontologischen Platonismus auf das Problem der Wahrheit von mathematischen Axiomensystemen zurückgespielt werden (109).

Epistemologischer Platonismus: Darunter ist die Behauptung zu verstehen, daß man mathematische Entitäten durch eine Fähigkeit erfassen könne, die einer empirischen Sinneswahrnehmung vergleichbar wäre. Prominentester Vertreter dieser Richtung ist K.Gödel, der diese Fähigkeit als "mathematische Intuition" bezeichnet. Allerdings steht Steiner einer solchen Auffassung ohne nähere Begründung von vornherein ablehnend gegenüber (110) (- was von seiten eines Kritikers, James E.Tomberlins in "Philosophical and Phenomenological Research", auch entsprechend kritisch gewürdigt wird).

Bevor sich Steiner insbesondere dem ontologischen Platonismus zuwendet, gilt es, einem generellen Einwand entgegenzutreten: Wenn mathematische Entitäten überhaupt existieren, dann müssen sie "unfaßbar" sein. Denn Wahrnehmung ist nur vorstellbar über eine kausale Wechselwirkung zwischen wahrnehmender Person und wahrgenommenem Objekt. Da aber mathematische Entitäten per definitionem als ideale, unwandelbare (platonische) Objekte angesehen werden, ist es undenkbar, daß eine Kausalkette existiert, die von derartigen Objekten als die Erkenntnis formenden Entitäten ausgeht. Daraus aber ließe sich folgern, daß mathematische Axiome entweder nur unwahr sein können oder aber als unerreichbar angesehen werden müssen (110/111).

5.1 Kausaltheorie der Erkenntnis

Obiger Kritikpunkt enthält zwei Behauptungen:

1. daß die Kausaltheorie der Erkenntnis wahr ist
2. daß sie "wahre" mathematische Sätze unfaßbar macht (111)

Steiner diskutiert verschiedene Versionen kausaler Erkenntnistheorien, die im folgenden nur kurz thematisiert werden sollen:

(1) "One cannot know that *p* unless the fact that *p* causes one's knowledge (or belief) that *p*." (111)

Hier bereitet die Formulierung "the fact that *p*" ernste Schwierigkeiten, s. z.B. den Beweis von Frege, Gödel, Davidson (112).

(2) "One cannot know that a sentence *S* is true, unless *S* must be used in a causal explanation of one's knowing (or believing) that *S* is true." (113)

Diese Interpretation in Anlehnung an A.Tarski steht nicht im Widerspruch zu einer platonistischen Auffassung der Wahrheit mathematischer Sätze, wodurch sich ein Kausaltheoretiker zu einer abgewandelten Formulierung genötigt sehen würde (114):

(3) "One cannot know anything about *F's* unless this knowledge (or belief) is caused by the *F's*, or some of the *F's*, etc." (114) ("*F's*, that is, ... all sorts of inanimate objects" (115))

Problematisch scheint sowohl eine Klärung der Bedeutung von "about" als auch die Deutung von *F* als "Kausalgrund" - besser spricht man von "Ereignissen" als Gliedern einer Kausalkette:

(4) "One cannot know anything about *F's* unless this knowledge (belief) is caused by at least one event in which at least one *F* participates." (115)

Der Kausaltheoretiker ergänzt: "further that nothing can participate in an event unless it has spatial and temporal position. Numbers and functions ... are thus unknowable." (115)

Steiner kontert mit einem Gegenbeispiel: Angenommen, eine ausgestorbene Rasse von (sinngemäß) "Waldmenschen" hätte Fußspuren in einem Wald hinterlassen, und ein Anthropologe würde später anhand dieser Spuren Rückschlüsse auf deren Existenz ziehen; dann, so Steiner, lägen zwei verschiedene Arten von "Ereignissen" vor: Zum einen das Hinterlassen der Fußabdrücke durch die Wesen, zum anderen die Wahrnehmung derselben - nicht der Wesen! - durch den Anthropologen. D.h. es läge Wissen über die Existenz einer ausgestorbenen Rasse vor, ohne daß es ein Ereignis (zwischen Wesen und Anthropologe) gegeben hätte, an dem eines der Wesen *unmittelbar* teilgenommen hätte. Entweder erweitert man also den Ereignisbegriff um eine zeitliche Komponente oder aber man erläutert, daß das erste angenommene Ereignis zu einer empirischen "Bedingung" geführt haben muß, die wiederum verantwortlich war für ein zweites Ereignis, das maßgebend war für das Wissen des Anthropologen. Dies jedoch wäre schon wieder eine kausale Erklärung in Form von Sprache - und würde also unter Version (2) zu behandeln sein, die sich für einen Platonisten als unproblematisch erwiesen hat (116).

Ich denke, daß Steiner bei seiner Argumentation übersehen hat, daß am Anfang seines Gegenbeispiels die Existenz von Waldmenschen als *Tatsache* vorausgesetzt worden ist ("Suppose a now extinct species of animal ..." (115/116)), obwohl - ebenfalls per Voraussetzung - niemand "kausal" mit ihnen in Berührung gekommen ist. Aber was heißt in diesem Zusammenhang "Tatsache"? Für einen Kausaltheoretiker ergäbe sich vielleicht folgender Ausweg: (4) sei in diesem Falle nicht anwendbar, da "Waldmensch" nur eine *Bezeichnung*, eine *Hypothese* im Rahmen wissenschaftlichen Theoriebildung sei - ob dieser *wirklich* existiert habe (und damit als "Tatsache" im Sinne von F unter (4) fiele), sei außerhalb kausaler Begründungsstrukturen nicht zu belegen (denn Wahrnehmung finde nur über Kausalketten statt, vgl. auch die "Kausaltheorie der Wahrnehmung" im nächsten Kapitel). Versucht man aber, "Tatsache" innerhalb einer Kausaltheorie zu definieren, so gerät man - zumindest gemäß (4) - schnell in einen Zirkel, das F als Prämisse in (4) über (4) selbst definieren zu müssen - was u.U. tatsächlich eine Kausaltheorie im Sinne von (2) nahelegen würde.

Andererseits, so könnte man einwenden, entspricht es der üblichen wissenschaftlichen Denkweise, das, was im Rahmen einer Theorie über Kausalketten als "unabdingbar" akzeptiert worden ist, als Tatsache aufzufassen oder zumindest so darüber zu sprechen, selbst wenn der Wissenschaftler als beobachtendes Subjekt nicht in raum-zeitlicher kausaler Wechselwirkung mit einem solchen Objekt gestanden hat (mannigfaltige Beispiele bei Physikern - sind Atome, Elementarteilchen Tatsachen? Was ist mit Feldern? Kräften?). Die Logischen Positivisten haben derartige Schwierigkeiten durchaus gesehen und sich nicht umsonst um eine Lösung des Problems im Rahmen eines Konstitutionssystems wissenschaftlicher Begriffe bemüht, s. z.B. H.Hahn in [2], Abschnitt 5, S.20ff).

Daraus aber folgen konsequenterweise weitere Fragen, die ein strenger Kausaltheoretiker im Sinne von (4) beantworten muß: Was wird als "Wissen" im Rahmen einer kausalen Begründung überhaupt akzeptiert? Nur vom beobachtenden Subjekt "unmittelbar Wahrgenommenes"? Könnte dann eine wissenschaftliche Theoriebildung als "Wissen" aufgefaßt werden? (s. z.B. ebenfalls Hahn: "Naturgesetze sind Hypothesen", S.20!) Selbst Informationen über fremde Länder, die ohne Reise z.B. per Film oder Buch vermittelt werden, dürften in streng (4)-kausalem Sinne nicht mehr als "Wissen" bezeichnet werden.

So ergibt sich meines Erachtens ein ganzes Bündel von bedrohlichen offenen Fragen bezüglich "Tatsache" oder "kausalem Wissen", wenn man versucht, eine Kausaltheorie im Sinne von (4) aufrechtzuerhalten - oder aber man geht tatsächlich den von Steiner (wenn auch meiner Meinung nach aus anderen, weniger einsichtigen Motiven) vorgeschlagenen Weg und zieht sich auf Kausaltheorie (2) zurück.

5.2 Kausaltheorie der Wahrnehmung

Als Prinzip dieser nachfolgenden Spielart einer Kausaltheorie läßt sich formulieren: Wahrnehmung geschieht nur, wenn das, was wahrgenommen wird, die Wahrnehmung verursacht (vgl. epistemologischer Platonismus) (117). Analog zum vorhergehenden Kapitel lassen sich folgende Versionen sprezifizieren:

(A) "One cannot see that *S* ('S' replacing an arbitrary sentence) unless *N* ('N' replacing a name of the arbitrary sentence) must be part of a causal axplanation of the perceptual experience that is part of *seeing that S*."

(B) "One cannot see an *F*, unless the *F* participates in an event that causes one to have a *perceptual experience of an F*." (117)

Zwar ist (A) prinzipiell vereinbar mit einem platonistischen Standpunkt, doch bereitet die Formulierung "see that *S*" Schwierigkeiten, wenn man sie im Sinne von "etwas an einem Objekt wahrnehmen" deutet (117/118). (B) hingegen erweist sich als fehlerhaft, wenn man die Unterscheidung zwischen "sehen" als empirischer Sinneswahrnehmung und "wahrnehmen" als mentalem Bewußtseinsvorgang (u.U. auf einem Erfahrungshorizont zur Interpretation sinnlicher Reize) berücksichtigt (118). Bleibt (C):

(C) "One cannot see an *F*, unless the *F* participates in an event that causes one to have *some* perceptual experience." (118)

Diese im Vergleich zu (A) und (B) schwächere Formulierung würde einen Platonismus bedrohen. Steiner zitiert Grice, der Beispiele für Sinnestäuschungen anführt, um (C) bzw. die Rolle des "event"(Ereignisses) in (C) plausibel zu machen, kritisiert allerdings, daß dessen Plausibilitätserklärungen auf mathematische Bereiche nicht übertragen werden könnten (118f).

"In sum, whether the causal theory makes mathematical intution impossible depends on a negative answer to several moot questions:"

- "Can one (*perceptually) see that p* without, for any relevant x, seeing x? Can one see that 2+2=4 without 'seeing' 2?"
- "Is there a plausible version of the causal theory of perception which, unlike (C), permits the 'seeing' of abstract entities?"
- "Is (C) true - or must an exception be made in the case of abstract entities?" (121)

5.3 Holismus, Intuitionismus und ontologischer Platonismus

Bislang war von mathematischer Intuition in Anlehnung an einen epistemologischen Platonismus als Fähigkeit analog zu Sinneswahrnehmung gesprochen worden (121). Tatsächlich kann eine derartig verstandene mathematische Intuition manchmal zur Unterstützung eines ontologischen Platonismus, d.h. für die Evidenz mathematischer Objekte, herangezogen werden (s. z.B. Gödel - "Mengen existieren, weil wir sie uns vorstellen können" (122)).

Allerdings scheint ein anderer Zugang zu einem Begriff von mathematischer Intuition und ontologischem Platonismus erfolgversprechender:

(1) Man argumentiert ohne Bezug auf mathematische Intuition für einen ontologischen Platonismus, indem man die Unentbehrlichkeit mathematischer Objekte für mathematisches Wissen bzw. Wissenschaft allgemein demonstriert (122/123).

(2) Unter dieser Voraussetzung der Existenz mathematischer Objekte fragt man, wie es tatsächlich möglich sei, zu mathematischem Wissen zu gelangen (123).

Als erstes Beispiel dient die Position G.Berrys, der einen ontologischen Platonismus favorisiert, eine Fähigkeit wie mathematische Intuition jedoch ablehnt: Nach Berry sind unbeobachtbare, obwohl existierende mathematische Entitäten mit Wahrnehmungen über ein Gewebe von Theorien verknüpft, wie z.B. in der Physik. Dementsprechend lassen sich Hypothesen über Unwahrnehmbares indirekt prüfen durch Erfolg bei Anwendung im Zusammenhang mit direkter Wahrnehmung. Dies setzt jedoch nicht, so Berry, mathematische Intuition voraus: Vielmehr erhalten Aussagen über abstrakte

Entitäten ihre Berechtigung durch langandauernden, erfolgreichen Gebrauch in wissenschaftlichen Erklärungsversuchen und damit verbundene Gewöhnung (123).

Steiner wirft ein, daß aus einer holistische Betrachtungsweise als Grundlage mathematischen Wissens nicht zwingend ein Widerspruch zur Behauptung mathematischer Intuition folgt. Im Gegenteil scheint gerade die praktische Tätigkeit eines Mathematikers, den ein Erfolg seiner entwickelten Methoden in anderen Bereichen gar nicht primär interessiert, einen Anspruch auf mathematische Intuition zu bestärken (123/124).

Dieser Ansatz und die Verflechtung von Intuition, Platonismus und Holismus wird anhand einer Diskussion der Quineschen Auffassung weiter ausgeführt: Zwar tritt Quine nicht für eine strenge Trennung zwischen Wahrnehmung (Beobachtung) und Erklärung (Theorie) ein - denn was Objekte sind, wird stets in gewissem Rahmen von einer Theorie vorgegeben; dennoch hält er eine Art Arbeitsteilung zwischen Wissenschaftler (Mathematiker, Physiker) und Ontologe durchaus für explizierbar: Während sich der Ontologe z.B. mit (mengentheoretischen) Axiomen beschäftigen würde, wäre Aufgabe des Mathematikers die Deduktion von Sätzen aus dem vom Ontologen gegebenen Axiomensystem (125). Abgesehen von einigen Inkonsistenzen Quines bei der Darstellung seiner Position ist Steiner der Auffassung, daß eine derartig zwiespältige Trennung bezüglich des wissenschaftlich zu behandelnden Gegenstandes - "Quine's epistemological version of the (Carnap's) 'internal-external' destinction" - ersetzt werden müßte durch eine Unterscheidung bezüglich des *Wissens* über einen Gegenstand (126). Fragt man z.B. "How do we find out about physical objects?" (126), so ließe sich im Sinne Quines nur antworten: "holistisch". Für einen Holismus aber erweist sich die Existenzannahme physikalischer oder mathematischer Objekte als äußerst hilfreich, sowohl zur Deutung gewonnener Erfahrung als auch zur Voraussage künftiger Ereignisse (126) - nur unter der Voraussetzung der Existenz materieller Körper scheint es sinnvoll, Beobachtungen bezüglich derselben zu akzeptieren zu wollen.

Aus dieser Position muß laut Steiner (abgeschwächte) mathematische Intuition an Plausibilität gewinnen, obwohl, wie ich meine, aus Steiners Argumentation nicht zwingend hervorgeht, wenn er schreibt: "Intuition there might be, though *guaranteed* by holistic considerations. Such an intuition, however, would provide a degree of certainty for mathematical knowledge no greater than that provided by the holistic arguments." (S.126 - Schrägstellung von mir) Meines Erachtens sollte hier unterschieden werden zwischen *Entdeckung* auf der einen Seite, d.h. Erkennen von mathematischen Sachverhalten bzw. Formulierung mathematischer Sätze innerhalb einer Theorie, und *Begründung* auf der anderen, d.h. der Prüfung (Verifikation/Falsifikation) einer Theorie, die u.U. holistisch erfolgt. Die Plausibilität eines bestimmten Begründungszusammenhangs (Holismus) läßt dementsprechend aber keinen Rückschluß zu auf einen irgendwie besonders gearteten Entdeckungsvorgang (Intuition) - ebensowenig wie umgekehrt Intuition durch holistische Betrachtungsweisen widerlegt werden könnte. Steiners Verknüpfung scheint mir an dieser Stelle etwas gekünstelt, obwohl er am Ende des Abschnittes einen holistischen Anspruch auf mathematische Intuition selbst relativiert: "One objection to holism, that it cannot account for the indubitability of mathematics, is thus inconclusive. The traditional doctrine of intuition attempted to bridge the gap between the human and the ideal by postulating a special human faculty lodged in the soul. It attempted to reconcile the remoteness of mathematical objects with the firmness of mathematical knowledge ... But intuition turns out not to be necessary for the reconciliation (Anm.: unter Voraussetzung von Holismus und ontologischem Platonismus). - With all this, *the holist cannot yet explain how human beings come to know mathematical truths, though he can justify such knowledge ex post facto. Perhaps intuition may be of use here.*" (130 - schräg von mir)

5.4 Kriterien für mathematische Intuition

Nachdem in einem ersten Schritt ein ontologischer Platonismus verteidigt worden ist, gilt es nunmehr, den epistemologischen Anspruch von mathematischer Intuition deutlich zu machen. Dazu werden zwei Arten von Intuition unterschieden:

1. Intuition von Objekten: "intuition of x, 'x' a variable"
2. Intuition von Wahrheiten: "intuition that p, 'p' a schematic letter" (130) (p als Aussagevariable)

Ohne erstere Version einer "Intuition von Objekten" überhaupt zu diskutieren, da sie in Richtung eines epistemologischen Platonismus führt (vgl. auch Anfang von Kapitel 5 meines Aufsatzes), wendet sich Steiner der letzteren Auffassung zu. Auch hier sind beträchtliche Anfangsschwierigkeiten zu überwinden: Wie kann eine, wenn auch u.U. letztlich wahre, intuitive Vermutung zu "Wissen" werden? Wie ist im Hinblick auf menschliche Fehlbarkeit, Halluzinationen usw. zu unterscheiden zwischen "wahren" und "falschen" Vermutungen? (131) Sucht man eine Erklärung für die Möglichkeit "wahrer Vermutungen", so kommt man nicht umhin, eine bestimmte geistige Fähigkeit zu postulieren (132). Eine solche Fähigkeit aber muß unglaubwürdig bleiben, solange nicht Kriterien existieren, mit deren Hilfe man das Vorhandensein einer solchen Wahrnehmung überprüfen kann. Insbesondere müßte es sich - wissenschaftlichen Ansprüchen gemäß - bei ihr um eine reproduzierbare Technik handeln, für deren korrekte Anwendung Kontrollmöglichkeiten bestehen (132/133). Selbst wenn man für den Vorgang mathematischer Intuition einen bestimmten Zustand postuliert, in dem man sich befinden muß und in dem es dann unmöglich sein sollte, "falsche Vermutungen" zu machen, so muß doch der Wahrnehmende zumindest selbst die Fähigkeit haben, zwischen "richtigen" und "falschen" Zuständen von Intuition zu unterscheiden (133).

5.5 Steiners Auffassung von mathematischer Intuition

Steiner favorisiert eine andere Art von mathematischer Intuition als die bislang diskutierte "Intuition von wahren Aussagen" und orientiert sich hierbei an Benacerraf

(s. auch Kapitel 2): "... we accept mathematical objects, contra Benacerraf, but we ~~but we~~ agree that the only things to know about these objects of any value are their relationships with other things. (This is the mark of abstract objects.) Intuition becomes then the intuition of structures rather than the intuition *either* of truths or of individual objects." (134)

Diese dritte Art von mathematischer Intuition (als Intuition von "Strukturen"), die nach Steiners Erfahrungen der unter Mathematikern verbreiteten am nächsten käme, könnte vielleicht am ehesten als eine Art Abstraktionsprozeß verstanden werden: "One imagines or looks at the material bodies, and then diverts one's attention from their concrete spatial arrangement. One gathers up in one's mind the objects into a manifold, and then has an intuition of their structure." (134). Eine Anzahl weiterer Hinweise auf das Vorhandensein mathematischer Intuition wird am Ende des Kapitels aufgeführt (135f).

Kapitel 6

Schluß

6.1 Zusammenfassung der Kritik

Im Laufe der Darstellung von Steiners Argumentation wurden einige wesentliche Kritikpunkte gefunden, die im folgenden noch einmal kurz zusammengestellt werden sollen:

Zu Steiners Verteidigung des Logizismus im ersten Kapitel seines Buches wurden Bedenken geäußert, die eine abgeschwächte Formulierung des logizistischen Reduktionismus als rationale Rekonstruktion betrafen. Steiners Abwehr des Wittgensteinschen epistemologischen Angriffs bezüglich einer Überschaubarkeit logischer (Russellscher) Beweise wurde kritisiert mit dem Hinweis, daß eine Überschaubarkeit bei der von Steiner als Ersatz favorisierten (und von Quine entlehnten) "fast-primitiven Notation" nicht evident und erst anhand genauerer Kriterien für einen Überschaubarkeitsbegriff zu prüfen wäre. Gleichzeitig wurde bezweifelt, ob eine solche Rückführung noch als Reduktion auf Logik bezeichnet werden kann oder ob sie nicht in den Bereich eines rein mengentheoretischen Axiomensystems gehören würde. Bei einer Einführung des Begriffs der stipulativen Definition wurden gewisse Ungenauigkeiten im Zusammenspiel mit Konventionen festgestellt, obwohl dies den Verlauf von Steiners Diskussion nicht wesentlich beeinträchtigen konnte; ebenso hielt ich bei Steiners Gegenbeispiel zu einer speziellen Version der Kausaltheorie der Erkenntnis einen Einwand für angebracht, der aber wiederum keine wesentliche Änderung im Fortgang der Diskussion bewirkte. Schließlich wurde Steiners Andeutung einer intuitionistischen Auslegung des Quineschen Holismus in Frage gestellt, obwohl auch hier keine gravierenden Mängel nachgewiesen werden konnten.

Selbst wenn sich also die zuerst erwähnten ernsteren Einwände gegen eine (von vornherein hypothetische) Verteidigung des logizistischen Programms als berechtig erwiesen, so würde dies nichts daran ändern, daß später - wenn auch aus anderen Motiven - eine Ablehnung dieses Begründungsversuchs erfolgen muß; und die letzteren Kritikpunkte konnten allesamt als wenig einflußnehmend auf die Richtung der Steinerschen Argumentation angesehen werden.

6.2 Andeutung einer Kritik von Steiners ontologischem Konzept

Zwar kann somit kaum ein entscheidender Einwand innerhalb des Steinerschen Gedankengangs vorgebracht werden, der dessen Gefüge selbst in Frage stellen würde; dennoch sind meines Erachtens weder Steiners Hinweise auf einen ontologischen Platonismus zwingend - im großen und ganzen beschränken sich seine Bemühungen darauf, gewisse Widersprüche von vornherein auszuräumen bzw. ein gewisses Maß an Plausibilität für seine abschließenden Betrachtungen zu geben -, noch wirken seine Mutmaßungen bezüglich einer Fähigkeit mathematischer Intuition meines Erachtens überzeugend: Ohne selbst an dieser Stelle ausführlicher als nötig zu werden, wäre ich nicht bereit, von mathematischer Intuition im Sinne einer Intuition platonischer Objekte sprechen zu wollen; vielmehr könnte man in Anlehnung an Wittgenstein ([6], Abschnitt 108, S.298) grundsätzlich einwenden, daß "die Betrachtung ... gedreht werden (muß), aber um unser eigentliches Bedürfnis als Angelpunkt." Anstelle einer *Intuition von* etwas würde ich eher vorschlagen, von einer *Neigung zu* etwas zu sprechen, vielleicht besser: ein Gefühl zu haben für eine bestimmte Ausdrucksform, die im Bereich der Möglichkeit menschlichen Denkvermögens liegt (als Ansatzpunkt könnte die Wendung der Kantschen Philosophie dienen). Als Beispiel: Nicht, daß es J.S.Bach mit seinem "Wohltemperierten Klavier" gelungen wäre, den Kanon menschlicher Stimmungslagen und Empfindungen kunstvoll *nachzuzeichnen*, sondern vielmehr, daß der Komponist gleichsam eine neue Sprache, eine neue Ausdrucksform gefunden hat, in der solche Empfindungen überhaupt erstmals künstlerisch gestaltet wurden; oder in Übertragung auf Mathematik: Nicht daß Gödel sich tatsächlich in einer platonische Welt mathematischer Objekte kraft seiner Intuition hätte bewegen können, sondern vielmehr daß er in so hohem Maße dazu befähigt war, in derartigen Begriffen zu denken, daß er schließlich die Objekte seiner Einbildungskraft als wahre Entitäten ansehen mußte.

In diesem Sinne könnte kritisiert werden, daß Steiners "Denkbewegung" - geradlinig orientiert im Hinblick auf Intuition und einen ontologischen Platonismus - grundsätzlich eine wenig erfolgversprechende Richtung eingeschlagen hat: Meines Erachtens sollte mehr - vielleicht in Anlehnung an eine kantsche Transzendentalphilosophie - auf die Bedingungen möglicher Erkenntnis reflektiert werden, anstelle nach der Erkenntnis vom Menschen unabhängiger platonischer Entitäten zu streben; vielleicht sollten die Bemühungen um (mathematische) Erkenntnis vielmehr als ein Kreisgang verstanden werden, so wie es z.B. in einem Gedicht von H.M.Enzensbergers angedeutet ist (*"Schwarz-Weiß-Zeichnung", nach Hermann Weyl*): *"Die weiße Kreide in meiner Hand,/ meine Herren, besteht,/ wie sie wissen, aus Molekülen,/ Die Moleküle bestehn aus Partikeln,/ Ladung, Masse, Strangeness und Spin:/ Spuren, die sich auflösen/ in der Blasenkammer/ und verschwinden, in meiner Hand,/ in diesen endlosen Formeln,/ die sie kennen oder nicht kennen,/ meine Herren, und die ich hier/ an die schwarze Wand zeichne/ mit Kreide, mit Kreide, mit Kreide."*

Kapitel 7

Literaturverzeichnis

[1] CARNAP, R.: Die logizistische Grundlegung der Mathematik. in: Erkenntnis 2, 1931

[2] HAHN, H.: Logik,Mathematik und Naturerkennen. in: H.Schleichert, Logischer Empirismus - der Wiener Kreis; 1975, Wilhelm Fink Verlag, München

[3] KONDAKOW, N.I.: Wörterbuch der Logik. 2.Auflage, 1983, VEB Bibliographisches Institut Leipzig

[4] KUHN, T.S.: Die Struktur wissenschaftlicher Revolutionen. 2.Auflage, 1976, Suhrkamp Taschenbuch Wissenschaft 25

[5] SCHEIBE, E.: Zur Rehabilitierung des Rekonstruktionismus. in: H.Schnädelbach, Rationalität; 1.Auflage, 1984, Suhrkamp Taschenbuch Wissenschaft 449

[6] WITTGENSTEIN, L.: Philosophische Untersuchungen. in: Wittgenstein Werkausgabe Band 1; 1.Auflage, 1984, Suhrkamp Taschenbuch Wissenschaft 501

[7] WITTEGNSTEIN, L.: Bemerkungen über die Grundlagen der Mathematik. in: Wittgenstein Werkausgabe Band 6; 1.Auflage, 1984, Suhrkamp Taschenbuch Wissenschaft 506

Das zuletzt zitierte Gedicht stammt aus H.M.Enzensberger, Gedichte 1955-1970. 1971, Suhrkamp Taschenbuch 4