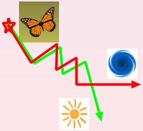
Chaos und Fraktale in komplexen Systemen

Rainer Klages

Institut für Theoretische Physik, Technische Universität Berlin
School of Mathematical Sciences, Queen Mary University of London

Tag der Mathematik, Beuth Hochschule
11.Mai 2019



Überblick

Was ist ein komplexes System?

kompliziert = verwickelt:

Es gibt einen einfachen Schlüssel.

komplex = vielschichtig:

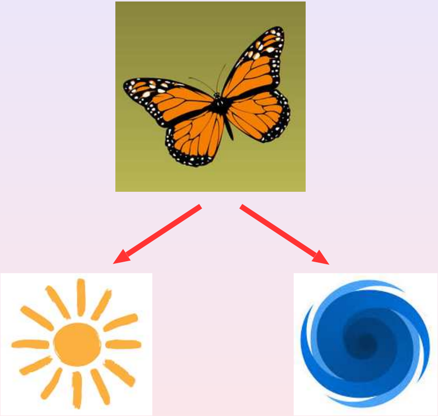
Das Ganze ist mehr als die Summe seiner Teile.

Emergenz

Der Ursprung von Komplexität liegt im nichttrivialen Zusammenspiel der einzelnen Teile: Daraus kann Neues entstehen.

Was ist Chaos?

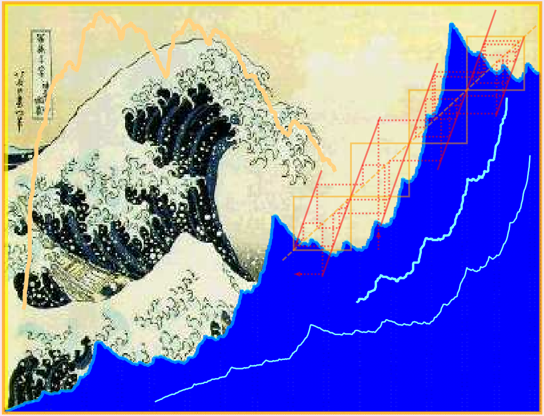
E.N.Lorenz (1963/1972): **Schmetterlingseffekt**



Sensitive Abhängigkeit der Entwicklung eines Systems von den Anfangsbedingungen.

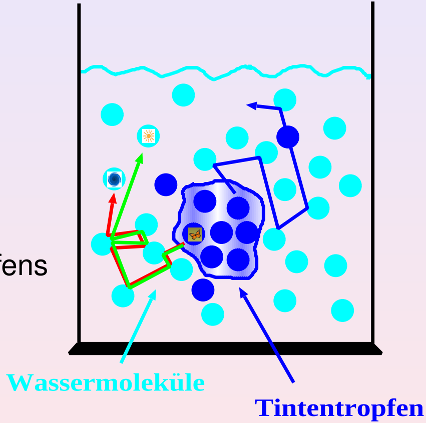
Ziel meines Vortrags:

Chaos ist ein Ursprung von Komplexität repräsentiert durch fraktale Muster.



Chaos und Diffusion

Beispiel: Mikroskopisches Chaos im Wasserglas



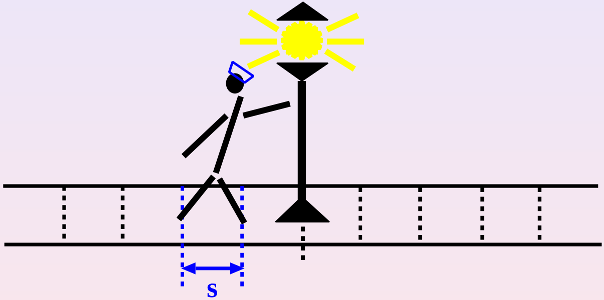
- Ausbreitung eines Tintentropfens durch Diffusion
- Modell: chaotische Stöße zwischen Billardkugeln

Chaos ⇒ 'Zufallsbewegung' ⇒ Ausbreitung

L.Boltzmann (1872)

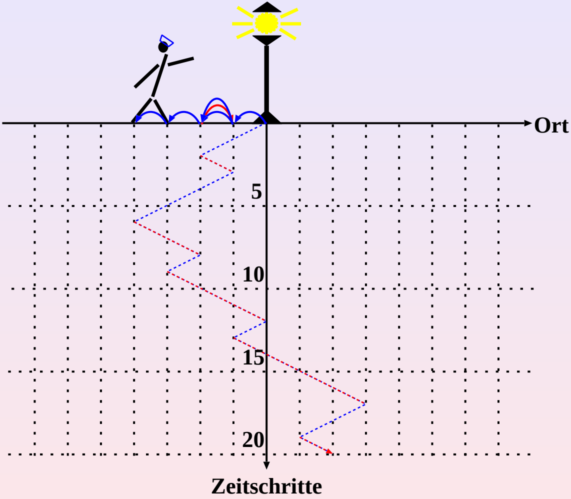
Der betrunkene Seemann am Laternenpfahl

Einfaches stochastisches Modell einer Zufallsbewegung:



- Schritte der Schrittlänge s nach links/rechts
- Seemann ist **volltrunken**, d.h. seine Schritte sind völlig unkontrolliert (vgl. Münzwurf; *Markov* Prozess)

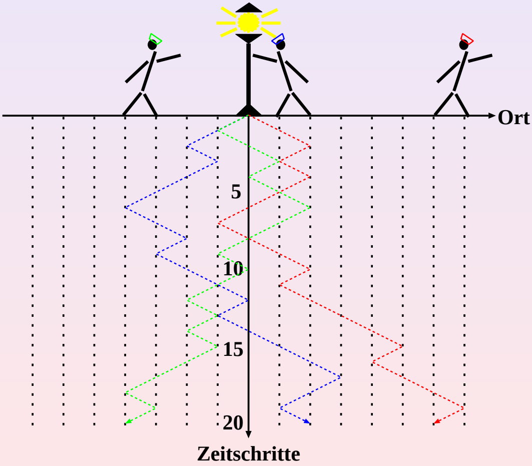
Der taumelnde betrunkene Seemann



Raum-Zeit-Diagramm als graphisches Hilfsmittel zur Darstellung des Pfades des Seemanns

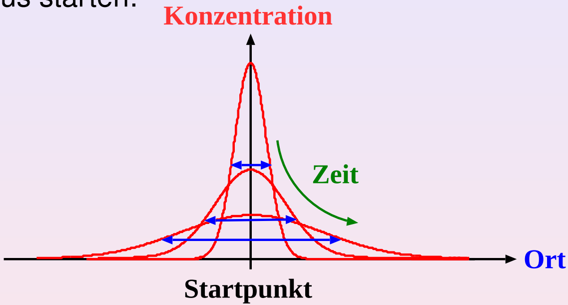
Mehrere betrunkene Seemänner

Ein einzelner Seemann ist nicht repräsentativ: nehme ein statistisches Ensemble.



Diffusionskoeffizient

Lasse eine große Anzahl ("Tropfen") von Seemännern von der Laterne aus starten:



Der Diffusionskoeffizient misst, wie schnell sich ein Tropfen ausbreiten kann. (A.Einstein, 1905)

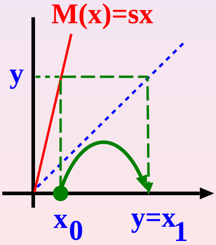
Betrunkene Seemänner mit Schrittgedächtnis

Modelliere einen Schritt durch ein deterministisches dynamisches System:

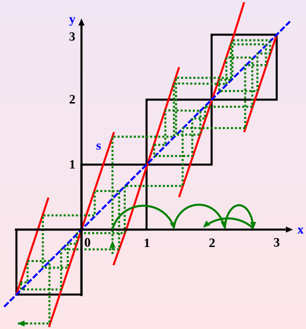
Die Bewegungsgleichung $\boxed{x_{n+1} = M(x_n)}$ bestimmt die Position $x_n \in \mathbb{R}$ zum (diskreten) Zeitschritt $n \in \mathbb{N}_0$.

Wahl $M(x) = s \cdot x \,,\; s > 1$

ergibt $x_{n+1} = s \cdot x_n$:



periodisch fortgesetzt:



Determinismus: Dieselbe Anfangsposition x_0 reproduziert x_n.

Wie definiere ich Chaos mathematisch?

Die (lokale) Dynamik war $x_{n+1} = sx_n$.

Was passiert mit kleinen Störungen der Anfangsposition?

$$\Delta x_0 := x_0 - \tilde{x}_0 \ll 1$$

- erster Zeitschritt:

$$\Delta x_1 := x_1 - \tilde{x}_1 = s(x_0 - \tilde{x}_0) = s\Delta x_0$$

- iteriere die Bewegungsgleichung:

$$\Delta x_n = s\Delta x_{n-1} = s^2\Delta x_{n-2} = \cdots = s^n \Delta x_0 = e^{n \ln s}\Delta x_0$$

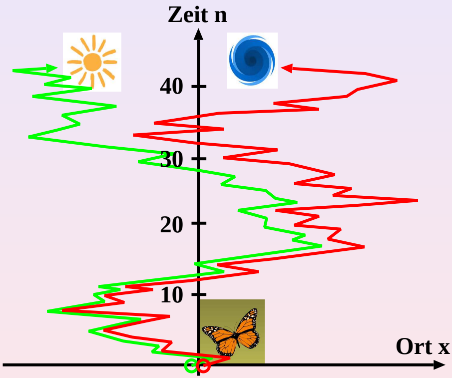
$\lambda(s) := \ln s$: **Lyapunovexponent**

A.M.Lyapunov (1892)

λ misst die Rate des exponentiellen Wachstums einer Anfangsstörung. $\lambda > 0$: Die Dynamik ist **chaotisch**.

Zurück zu Lorenz

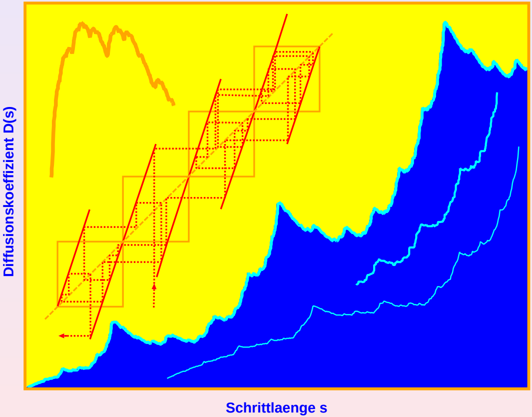
Unser einfaches Modell generiert Diffusion basierend auf deterministischem Chaos:



- der Seemann bewegt sich deterministisch (Gedächtnis)
- sensitive Abhängigkeit von den Anfangsbedingungen

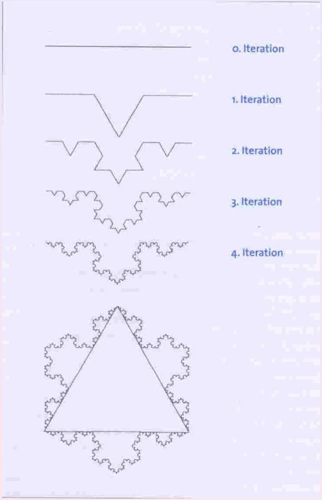
Chaos und Fraktale

Wie verändert sich der Diffusionskoeffizient als Funktion der Schrittlänge für unser Modell?



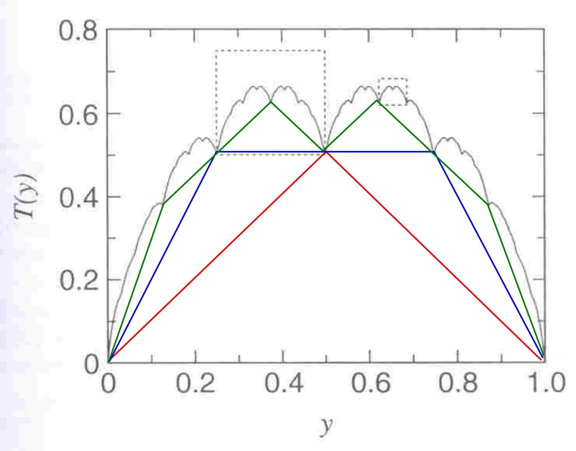
Der Diffusionskoeffizient hat Struktur auf beliebig kleinen Skalen: Er ist fraktal.

Fraktal 1: die Koch'sche Schneeflocke



H. von Koch (1904)

Fraktal 2: die Takagi-Funktion



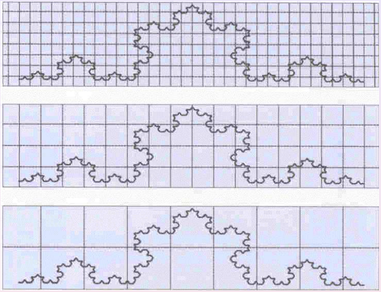
T.Takagi (1903)

‘Fraktal 3’

K.Hokusai (1760-1849)
Die große Welle von Kanagawa

Fraktale Dimension

Beispiel: Koch-Kurve



- definiere *Raster von Kästchen*
- zähle # Kästchen N, die die Kurve überdecken
- reduziere die Kästchengröße ϵ; *Annahme:* $N \sim \epsilon^{-d}$

$$\Rightarrow \boxed{d = -\ln N / \ln \epsilon \ (\epsilon \to 0)}$$

Kästchendimension

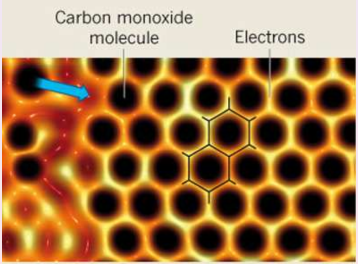
ganzzahlig: Punkt $d = 0$; Linie $d = 1$; ...

fraktal: Koch-Kurve $d = \ln 4 / \ln 3 = 1.26$

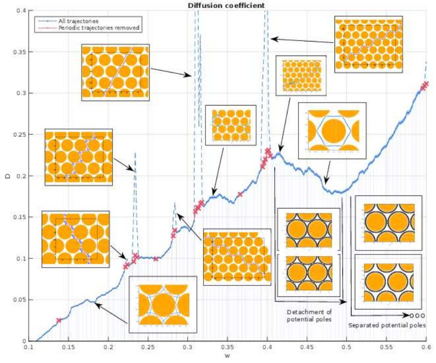
Problem: Takagi-Funktion und Diffusionskoeffizient $d = 1$ **!**

Fraktaler Diffusionskoeffizient im Experiment?

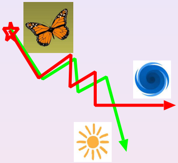
Diffusion von Elektronen in molekularem Graphen:



Diffusionskoeffizient als Funktion eines Parameters aus Simulationen für ein Modell dazu:



Literatur



- K.Richter, J.-M.Rost: *Komplexe Systeme.* Fischer TB 15550 (2002)
- B.Eckhardt, *Chaos.* Fischer TB 15569 (2004)